Bevisets plass i norske læreplaner

En historisk oversikt og drøfting av matematiske bevis i videregående skole

Håkon Grønsveen Olsrud

RDID 4190-Masteroppgave i matematikkdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Det utdanningsvitenskapelige fakultet

UNIVERSITETET I OSLO

Våren 2009

Forord

Fem år som student ved Lektor- og adjunktprogrammet (LAP) avsluttes med denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk. Dette studiet startet opp i 2003 og jeg er en del av det andre kullet som uteksamineres.

Først vil jeg få takke mine veiledere Liv Sissel Grønmo og Torgeir Onstad ved ILS for verdifull veiledning og for at jeg fikk skrive oppgave hos dere. Dere viste tidlig interesse for min oppgaveskriving, noe som gjorde det lettere for meg å bli ferdig med arbeidet. Forhåpentligvis vil denne oppgaven bidra til å gi en oversikt over matematiske bevis i norsk skolehistorie og belyse hvilke argumenter som blir brukt for og imot en slik undervisning.

Også takk til Tom Lindstrøm, Kristian Ranestad og lærerne som tok seg tid til å bli intervjuet.

Videre vil jeg takke de gjenværende lektorspirene i matematikk og fysikk fra 2004-kullet, Simen André Sørby, Karl-Robert Rønning, Jørgen Thorvaldsen og Geir Magne Flø, for godt faglig samarbeid og sosialt samvær gjennom disse fem årene.

Som seg hør og bør rettes en stor takk til mine foreldre, Bjørg og Oskar, for støtte og omtanke gjennom hele studiet og livet for øvrig. Også takk til min bror, Øystein, for korrekturlesing og konstruktive tilbakemeldinger. Nå spørs det om jeg ikke får gå til anskaffelse av lektorfrakk og flanellsskjorte som du så lenge har ansett som obligatorisk i min kommende bransje.

Oslo, mai 2009

Håkon Grønsveen Olsrud

Sammendrag

Denne masteroppgaven i matematikkdidaktikk omhandler matematiske bevis og beskriver bevisets rolle i læreplanene for videregående skole[1] fra 1896 til 2009. Oppgaven drøfter ulike teoretiske perspektiver og argumenter som legges til grunn for ulike prioriteringer av beviset i matematikkundervisningen. Dette innebærer blant annet å finne begrunnelser for bevisets plass i læreplanene. Læreplanbegrepet har en vid betydning i denne oppgaven. I tillegg til den formelle, vedtatte læreplanen, omfatter begrepet også læreplanutvikleres intensjoner, samt læreres og lærebokforfatteres tolkninger av læreplanen. Gjennom undervisningen fremtrer enda en side ved læreplanbegrepet, det være seg utførelsen av den enkelte lærers tolkning av læreplanen i den faktiske skolesituasjon. Drøftingen av bevis baserer seg hovedsakelig på teori fra matematikkdidaktiske artikler og fagbøker som omtaler matematiske bevis og deres betydning. Problemstillingen tar for seg hvilken plass matematiske bevis har hatt i den videregående skole og danner grunnlag for en kartlegging av hvilke krav som elever har stått overfor tidligere og hva som kreves i dag av elever i aldersgruppen 16-19 år med tanke på kunnskaper og ferdigheter innen matematiske bevis. Samtidig danner problemstillingen grunnlag for en belysning av noen av dagens norske matematikklæreres syn på bevisets plass i matematikkundervisningen. I forbindelse med oppgavearbeidet har jeg hatt stor nytte av Ragnar Solvangs to bind av *Bevismetodikk* hvor han omtaler bevisets plass i norsk skolematematikk.

Oppgaven benytter et deskriptivt design ved tilnærmingen til spørsmålene i problemstillingen. Behandlingen av den første delen av problemstillingen består av en dokumentanalyse der det beskrives og tydeliggjøres i hvilken grad bevis har fremtredd i ulike læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver. I tillegg drøftes betydningen av matematiske bevis på bakgrunn av matematikkdidaktisk litteratur. I forbindelse med utformingen av de to seneste læreplanene ble det foretatt intervjuer med medlemmer av læreplangruppene for matematikk i utarbeidelsen av R94 (intervju 2) og K06 (intervju 3). Teori om utviklingen av matematisk forståelse er også tatt med for å se på mulige årsaker til hvorfor bevisteorien kommer relativt sent inn i skolematematikken. Den andre delen av problemstillingen som tar for seg utvalgte læreres syn på bevis i skolen er knyttet til intervjuer av fem erfarne matematikklærere i dagens videregående skole (intervju 1). Intervjuguidene finnes i kapittel 9.

[1] Betegnelsen gymnasium ble benyttet fra 1869-1976

Som konklusjon i masteroppgaven kan det sies at matematiske bevis har vært betraktet som en viktig del av matematikkfaget i alle læreplanene som her har blitt studert. Det synes som om at beviset hadde en større plass i undervisningen ved Lov av høiere almenskoler av 1896 og 1935, en tid hvor gymnasene var for en mindre del av årskullet[2] enn i de to læreplanene som fulgte i 1976 og 1994 (R94). Læreplanene fra 1976 og 1994 la mer vekt på anvendelser innenfor matematikken og bevisteori ble nedprioritert. R94 ble revidert i 2000 og bevis fikk en enda mindre rolle etter dette, noe som går klart frem av læreplanmålene og eksamensoppgavene før og etter årtusenskiftet. Kunnskapsløftet (K06) fra 2006 ser ut til å satse mer på bevis enn sine to forgjengere fra 1976 og 1994. Elevene skal lære om ulike bevistyper og bruke disse til å gjennomføre matematiske bevis. Induksjonsbeviset er tilbake i pensum etter, i praksis, å ha vært ute av den videregående skole i nærmere tjue år. Sammenliknet med Lov om høiere almenskoler av 1896 og 1935 omtaler K06 bevis i større grad, men om dette kommer til å gjenspeile seg i eksamensoppgavene i samme grad som hos de to førstnevnte er for tidlig å si.

Alle de fem lærerne som ble intervjuet stilte seg positive til bevis i skolen, men noen mente at det er for sent å innføre bevis og tenkemåten rundt temaet ved det andre året i den videregående skole. Enkle bevis og resonnementer mente de burde komme allerede på ungdomstrinnet, som en innledning til et tema mange opplever som vanskelig. Disse lærerne var av den oppfatning at dette kunne også være med på å lette elevenes arbeid med bevisteorien i den videregående skole. Slik det er nå opplever noen lærere at dyrebar undervisningstid blir brukt til å sette elever inn i et tema som mange av dem ikke behersker etter gjennomgåelsen. Bevis er derfor et tema som enkelte lærere velger å la komme i andre rekke etter regneteknikk og fremgangsmåter. Det kom også frem meninger om at bevis i skolen ikke må være så stringente at de ødelegger regnegleden. Bevisene i skolesammenheng skal kun være «smaksprøver» på hva temaet går ut på. Samtidig ønsket lærerne i den grad det var mulig av tidsmessige og pedagogiske hensyn, å begrunne hvorfor matematikken fungerer. Dette innebar at flere lærere hadde omtrent like mye bevis i undervisningen selv om læreplanene de underviste etter hadde ulikt fokus på temaet.

[2] Omtales nærmere i 5.2 *Lov om høiere almenskoler av 10. mai 1935*

Innhold

1. Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

I løpet av fem års universitetsstudier innenfor matematikkfeltet har jeg vært innom mange ulike interessante emner og temaer. Da jeg stod overfor valg av tema for min masteroppgave i matematikkdidaktikk var det nærliggende for meg å ta utgangspunkt i det jeg følte hadde gitt meg mest i denne perioden, nemlig matematiske bevis. Bevisføring og argumentasjon var i stor grad ukjent for meg som ny student ved Universitetet i Oslo, høsten 2004. Selv var jeg elev under R94 og hadde mye regning og bruk av algoritmer på videregående skole, men fikk sjelden noen begrunnelse for hvorfor reglene var som de var. Denne overgangen fra et regneteknisk fokus til en hverdag med resonnering og argumentasjon var ikke enkel i starten, men etter hvert kom jeg inn i tankegangen og fikk et syn på matematikken utover tall og regneoperasjoner. Til tross for full fordypning i matematikk fra videregående skole (3MX) følte jeg at overgangen til høyere utdanning ble noe brå når det gjaldt å ta steget fra å *huske* regneregler til å *forstå* hvorfor matematikken fungerer. Det var dermed naturlig å undersøke om lære i matematiske bevis var forbeholdt høgskole- og universitetsnivå, og om det eventuelt var spesielle grunner til dette, eller om andre medstudenter hadde en sterkere bakgrunn i bevisføring enn meg selv fra den videregående opplæring. Et nærmere blikk på læreplaner i matematikk for videregående skole og deres vektlegging av bevis virket som en fornuftig tilnærming for å finne ut mer om dette.

Hva som faktisk står i en læreplan er ikke nødvendigvis det elever blir undervist i. Det skilles blant annet mellom en *formell, oppfattet og operasjonalisert (implementert)* læreplan (Goodlad i Engelsen 2006). Læreren og lærebokforfattere skal tolke læreplanen (oppfattet) slik den står skrevet av Utdanningsdirektoratet (formell), men ulike lærere har forskjellig forståelse av innholdet og underviser deretter (implementert). For å få et inntrykk av hvordan læreplaner kan oppfattes var det også av interesse å finne ut noe om ulike læreres syn på matematiske bevis og deres undervisningspraksis innenfor dette temaet. Konkret innebar dette å finne ut mer om argumenter som blir brukt for og imot bevis og bevisføring i skolen samt deres forståelse av læreplanene de har undervist etter. Da læreplanen for Kunnskapsløftet (K06) ble utgitt høsten 2006 viste det seg at induksjonsbeviset[3] kom tilbake

[3] Omtales nærmere i 2.3 *Noen vanlige bevistyper*

etter å ha vært utelatt i mange år. Som fremtidig lærer og underviser etter K06´ retningslinjer er det viktig å kunne legitimere bevisets stilling i pensum, men samtidig ut ifra et didaktisk perspektiv være reflektert rundt hva som burde regnes som viktig kunnskap i skolen.

I *Bevismetodikk*, bind 1 (Solvang 1986), nevner Solvang flere steder at å studere utviklingen av bevisets plass i norsk skolematematikk er en egen forskningsoppgave i seg selv og at han kun behandler dette «fragmentarisk» i sitt verk. Dette har vært ytterligere en inspirasjonskilde for meg i mitt arbeid med oppgaven.

1.2 Problemstilling

Problemstillingen ble utviklet på bakgrunn av innholdet i forrige delkapittel og har som formål å belyse bevisets posisjon som en del av pensum i matematikk for det videregående trinnet gjennom drøyt hundre år, samt gi et innblikk i noen av dagens læreres syn på dette temaet i skolen. På grunnlag av dette har jeg kommet frem til følgende problemstilling:

Hvilken plass har matematiske bevis hatt i læreplaner for den videregående skole fra 1896 til 2009, og hvilke syn har dagens matematikklærere på dette trinnet om bevis som tema for undervisning i skolen?

Begrepet *videregående skole* omfatter elevgruppen i alderen 16-19 år og gikk frem til 1976 under betegnelsen gymnasium. Det bør her spesifiseres at det er spesialistkursene i matematikk ved det studieforberedende utdanningsprogrammet (betegnelse fra K06), tidligere kalt allmennfaglig studieretning (betegnelse fra R94), som vil være hovedfokuset i oppgaven. Dette skyldes at det først og fremst er her matematiske bevis fremtrer i særlig grad.

Bevisets *plass* uttrykker i hvilken grad bevis er representert i de ulike læreplanene i den aktuelle tidsperioden. Læreres syn på matematiske bevis som undervisningsemne i skolen skal gi et innblikk i noen utvalgte av dagens læreres meninger omkring temaet og belyse noen endringer i pensum med tanke på bevis. Disse synspunktene sees i sammenheng med teoretikeres argumenter, blant annet Imre Lakatos´ bok fra 1976 *Proofs and Refutations* og Gila Hannas artikkel *The Ongoing Value of Proof* fra 1996, to forskjellige fremstillinger av bevisets betydning. Dette vil inngå som en del av drøftingsprosessen i delkapittel 3.2. Det er viktig å merke seg at det med *lærere* her menes et lite utsnitt av lærere og ikke yrkesgruppen som helhet. Intensjonen med oppgaven er ikke å generalisere, men å eksemplifisere enkelte synspunkter gjennom intervjuer.

1.3 Oppbygning av oppgaven

Kapittel 2 definerer oppgavens bruk av bevisbegrepet, diskuterer ulike syn på bevis og setter bevis inn i en historisk sammenheng.

I kapittel 3 omtales utvikling av matematisk forståelse og det gis et didaktisk perspektiv på bevis, det vil si at didaktisk teori sees i sammenheng med plasseringen av bevisforståelse i menneskets intellektuelle utvikling. Videre betraktes ulike perspektiver på bevisets betydning både i og utenfor skolen, og dette legger grunnlaget for en drøfting av emnet i undervisning.

Kapittel 4 tar for seg oppgavens metoder, begrunner metodevalgene og relaterer dem til noen generelle forskningsmetoder.

Analysen av læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver er plassert i kapittel 5 behandler den første delen av problemstillingen og utgjør den største delen av oppgaven. Her undersøkes det hvor fremtredende bevis har vært til ulike tider i gymnas og i den videregående skole. Et innblikk i utformingen av de to seneste læreplanene, R94 og K06, gis i seksjonene 5.4.5 og 5.5.4 der intervjuer med medlemmer av læreplankomiteene danner grunnlaget for å finne ut hva som ble vektlagt i diskusjonen rundt bevis som en del av pensum. Dette gir et lite innblikk i *ideenes læreplan* (Engelsen 2006). I det påfølgende kapittelet, kapittel 6, som behandler problemstillingens andre del, analyseres intervjuene med utvalgte lærere og deres syn på bevis i skolen.

Det hele oppsummeres i kapittel 7 hvor det gjøres rede for oppgavens funn og konkluderes. Videre bemerkes det hvilke begrensninger oppgaven har, og noen forslag til videre studier nevnes. Litteraturen finnes i kapittel 8, mens intervjuguidene er vedlagt i kapittel 9.

1.4 Begrepsavklaringer

Hovedbegrepet i denne oppgaven er *bevis.* Det er ikke fullstendig enighet knyttet til begrepet, noe som blir nærmere diskutert i delkapittel 2.1.

En læreplan kan betraktes fra ulike synsvinkler. Et av aspektene ser på hvordan læreplanen har blitt til, herunder å undersøke hvilke beslutnings- og kontrollprosesser som blir iverksatt. Et annet perspektiv er å belyse hvordan læreplanen virker inn på læreres og elevers virksomhet (Engelsen 2006). Hoveddelen av oppgaven omhandler den *formelle* læreplan som faktisk foreligger, men også den *oppfattede* i form av analyse av lærebøker. Den *implementerte* læreplan kommer til uttrykk ved intervjuer av lærere i den videregående skole om deres undervisningspraksis i bevisteori. *Ideenes* læreplan er representert ved intervjuer av medlemmer av læreplankomiteene bak R94 og K06.

Det kan være verdt å påpeke at læreplaner tidligere gikk under betegnelser som leseplan og undervisningsplan. Disse betegnelsene ble benyttet i lovene om «høiere almenskoler» (1896 og 1935).

Der ikke annet er nevnt er det den skriftlige eksamensformen som omtales som «eksamen» i oppgaven.

Hva som er sant og usant er et kjent filosofisk spørsmål. I denne oppgaven bruker jeg *sannhet* om en generell enighet om noe som har blitt forhandlet frem og regnes som allment akseptert.

2. Bakgrunn

2.1 Hva er et matematisk bevis?

I all hovedsak, hvor det ikke blir antydet annet, vil oppgaven benytte følgende definisjon av et matematisk bevis:

> Mathematical proofs can be viewed as logically structured arguments that follow certain established sequences of steps to confirm or refute the viability of mathematical conjectures (Brumbaugh & Rock 2001 ifølge Buzuzi & Nyaumwe 2007: 1)

Min tolkning av dette er at beviset er en resonneringsfølge, hvor hvert ledd i følgen er i overensstemmelse med den klassiske logikkens lover som skal lede til en bekreftelse eller avkreftelse av matematiske påstander. Ved et fullendt bevis markeres Q.E.D[4]. Fremfor alt er et matematisk bevis 100 % gyldig i henhold til tradisjonell logikk. Et matematisk bevis kan også kalles et *deduktivt resonnement*. Ragnar Solvang bruker *bevis* og *deduktivt resonnement* som synonyme begreper (Solvang 1986, bind 2), noe denne oppgaven også vil gjøre. For en grundigere analyse av begrepet deduktivt resonnement, se Ayalon og Even (2008).

Dette er en veldig streng definisjon av et matematisk bevis. Det kan derfor være greit å nevne at i skolesammenheng blir sjelden denne definisjonen brukt når elevene vurderes i føring av bevis. Det kan sies at bevis har to ulike formål: å *overbevise* og *forklare* (Hersh 2005). Overbevisningsformålet finner sted i forskningen. Hersh hevder elever og studenter altfor lett lar seg overbevise om at påstander er sanne. For disse er det viktigere å forklare *hvorfor* noe er sant. Samtidig understrekes det i læreplaner at ikke alt kan bevises fra bunnen av[5]. Det er nødvendig å ha et felles grunnlag for hva som kan aksepteres uten bevis i skolen da det er en umulighet, tidsmessig, å gå tilbake til de mest grunnleggende aksiomene hver gang noe skal bevises. I matematikkdidaktisk forskning legges det vekt på at læreren skiller mellom forklaring, argumentasjon og bevis, og samtidig gjør elevene oppmerksomme på hva som kreves av dem i de ulike situasjonene (Dreyfus 2004).

[4] Quod Erat Demonstrandum (lat.) «hvilket skulle bevises»

[5] Se 1.2 *Matematikk i skolen*, Kirke, utdannings-, og forskningsdepartementet (1999)

Det strides blant de lærde i synet på matematiske bevis. Stridighetene er primært knyttet til objektperspektivet på bevis, det vil si selve eksistensen av et resonnement som fører til «sikker viten» og absolutte sannheter generelt. Blant matematikere er det i all hovedsak enighet om hva som kan kalles et bevis og ikke, ut ifra selve prosessen som fører frem til beviset. Ifølge den ungarskfødte matematikeren Imre Lakatos´ teori finnes ingen evigvarende sannheter. Hans sannhetsbegrep er knyttet til motbevis og innebærer at noe er sant inntil det blir argumentert godt nok for en annen sannhet. Med tiden kan det være mulig å finne et motbevis eller et unntak fra alle teoremer og lover (Lakatos 1976). Kort sagt: et matematisk bevis er en midlertidig sannhet. For hver gang en motsigelse blir kjent, vil teoremet måtte justeres og slik vil kunnskapen utvikle seg videre. Det er ordet *midlertidig* som skiller hans syn på bevis fra mange andre matematikere. Fra et slikt synspunkt er det et lite skille mellom deduktiv og induktiv vitenskap, for eksempel naturvitenskapen, hvor stadige forbedringer og utviklinger av hypoteser er en viktig del.

Andrew Wiles, som løste en av tidenes matematiske gåter, Fermats siste sats, ble spurt i et intervju med NOVA[6] om hva han la i begrepet matematisk bevis. Han sa følgende:

> In a mathematical proof you have a line of reasoning consisting of many, many steps, that are almost self-evident. If the proof we write down is really rigorous, then nobody can ever prove it wrong. There are proofs that date back to the Greeks that are still valid today. (Wiles)

Wiles legger vekt på at hvis et bevis skrives svært stringent vil ingen, noensinne, kunne motbevise dette. Et slikt syn på beviset er i dag det dominerende blant matematikere. Lakatos er ikke den eneste som stiller seg kritisk til urokkeligheten ved matematiske bevis. Intuisjonismen som utviklet seg tidlig på 1900-tallet ved L. E. J. Brouwer, hevder matematikk er menneskeskapt og at primære objekter innenfor matematikken er mentale konstruksjoner som er underlagt selvinnlysende lover (Aarnes 2009). Denne retningen er inspirert av Kants filosofi og er mer interessert i spørsmålet om *hvordan* vi kan vite at noe er sant, fremfor å finne ut *hva* som er sant. For at intuisjonistene skal akseptere gyldigheten til et utsagn, må det bevises på grunnlag av konklusjoner som vi allerede vet er sanne eller usanne. Ordet intuisjonisme har vi fra det engelske språk, og er en dårlig oversettelse av det tyske begrepet *Anschauung* som Kant brukte. En riktigere tolkning av det opprinnelige begrepet, på norsk, er *anskuelse*, og da gjerne *a priori* anskuelse, hvor det ikke er nødvendig

[6] Studentprogram opprettet av utdanningsdepartementet i USA

med erfaring for å erkjenne at matematikken er sann. Vi kjenner *intuisjon* fra dagligtalen som en umiddelbar oppfattelse eller forståelse av en sak, i motsetning til den analytiske resonnerende metoden hvor hypoteser utprøves og aksiomer er sentrale. Intuisjonistene stiller seg spesielt kritiske til bevistypen *ad absurdum*[7]. De mener prinsippet i tankegangen ikke er holdbar og at det ikke gis noen forklaring på hvorfor en påstand er sann. Denne holdbarheten avhenger av premisser de ikke er villige til å akseptere. Aristotelisk logikk hevder at et utsagn har to mulige verdier, *sant* eller *usant*. En påstand kan hverken ha begge disse verdiene eller ingen av dem, kun én. Matematiske bevis som baserer seg på denne tankegangen er ikke gyldige for intuisjonister. Uenigheten omhandler eksistensen av en tredje mulighet. Intuisjonsmen godtar ikke det logiske prinsippet *tertium non datur* (lat.) «noe tredje gis ikke» (Sandmel i Mathema 2000). Ingen har bevist at det ikke finnes en slik mulighet og derfor kan vi ikke være sikre på konklusjonene i et resonnement som baserer seg på dette prinsippet, hevder intuisjonismen.

Paul Ernest tar opp temaet deduktive resonnement og bevis. Han påpeker at matematiske bevis´ gyldighet avhenger av visse antakelser som må foretas. Disse antakelsene er ikke absolutte sannheter. Selv sier han det slik:

> Thus we cannot establish the certainty of mathematics without assumptions, which therefore is conditional, not absolute certainty. Only from an assumed basis do the theorems of mathematics follow (Ernest 1998).

Stridens kjerne er aksiomene. Ernest kaller dem «assumptions». Disse har fremkommet ved definisjoner eller en bred enighet om at er holdbare. Ernest kritiserer anseelsen av dem som et grunnlag for utvikling av sikker viten i matematikk, da aksiomene er sosialt konstruert. Euklids aksiomsystem har stått sterkt i over 2000 år, selv om det har vært gjennom enkelte revideringer i forbindelse med den ikke-euklidske geometrien Carl Friedrich Gauss innførte i første halvdel på 1800-tallet. Så lenge det deduktive resonnementet følger logikkens regler er det bare et ugyldig premiss (her: aksiomer) som kan lede til en falsk konklusjon. Et holdbart premiss er derfor alfa og omega. Mengdelæren inneholder kontroversielle aksiomer, og det har vært store uenigheter rundt Zermelos utvalgsaksiom, det såkalte «axiom of choice». Selv om de fleste matematikere nå aksepterer aksiomet og beviser basert på dette, finnes fortsatt skeptikere. For mer om temaet, se Katz (1998).

Det hersker, som tidligere nevnt, bred enighet om bevis´ gyldighet blant fageksperter. Det

[7] Begrepet forklares senere i oppgaven

finnes derimot ulike oppfatninger hos andre om hva som er et matematisk bevis. Dette går ut på hva som skal til for å fjerne tvilen hos den enkelte. Noen aksepterer utsagn som virker overveiende sannsynlig, mens andre har en mer «pedantisk» og tilsynelatende «kverulerende» holdning (Pólya 1990). Elever og lærere er et eksempel på grupper med forskjellig «overbeviselsesterskel». Som regel skal det mer til for å overbevise en lærer som har sterkere faglig bakgrunn og mer kunnskaper om stringent argumentasjon enn det elever besitter. Det matematiske bevis har strenge krav, så læreren har en stor didaktisk utfordring i å utvikle elevenes kritiske sans. Ved enkelte tilfeller kan det også oppstå uenigheter om hva som er et korrekt resonnement hvor lærere og elever representerer to ulike syn (Durand-Guerrier 2004).

2.2 Et innblikk i matematiske bevis´ historie

Et sentralt begrep den matematiske bevisføringen bygger på er *logikk*. Logikkens opprinnelse går tilbake til de gamle grekere, først og fremst Aristoteles (klassisk logikk). Logikk er prinsipper for å tenke i overensstemmelse med *grunnprinsippet* om at en ting er det en ting er, og selvmotsigelser er umulig. Aristoteles mente at logiske argumenter skulle bygge på *syllogismer*, en type logiske slutninger som består av to premisser, kalt en oversetning og en undersetning i tillegg til en konklusjon (Katz 1998). For at en syllogisme skal være gyldig må konklusjonen være en logisk følge av premissene. Eksempelvis kan oversetningen være påstanden «alle sjimpanser spiser bananer» med tilhørende undersetning «Julius er en sjimpanse». Av dette følger det at «Julius spiser bananer» (konklusjon). Som en følge av syllogistisk resonnement bemerket Aristoteles at det var mulig å bruke tidligere kunnskap til å utvikle ny. En forutsetning for at konklusjonen skal være gyldig er at premissene aksepteres. I matematikken kjenner vi disse premissene som *teoremer* eller *aksiomer* om det gås langt nok tilbake. Aksiomer er ubestridelige sannheter som ikke krever noe bevis. Aksiomene tas for gitt og danner grunnlaget i hvert eneste matematiske bevis. Innenfor matematikken regnes Euklids fem aksiomer i plangeometri, beskrevet i *Elementene* som de mest kjente (Fenn 2006). Euklid var den første personen som satte matematiske bevis inn i et deduktivt system (ideene forelå før ham) og de geometriske resultatene han kom frem til bygde på aksiomene han lanserte. Disse aksiomene var:

La det være forutsatt at

1) man kan trekke en rett linje fra et vilkårlig punkt til et vilkårlig punkt;

2) man kan forlenge et rett linjestykke ubegrenset i en rett linje;

3) man kan tegne en sirkel med vilkårlig sentrum og vilkårlig radius;

4) alle rette vinkler er like store;

5) dersom en rett linje skjærer to rette linjer og de innvendige vinklene på samme side (av overskjæringslinja) er mindre enn to rette vinkler, så vil de to rette linjene møtes om de forlenges ubegrenset til denne siden (Onstad 1994: 33).

Det var lenge knyttet en viss skepsis til det femte aksiomet, som ble antatt å kunne utledes ved hjelp av de fire andre. Etter ca 2000 års arbeid ble det klart at dette er et aksiom, uavhengig fra de andre. Under arbeidet ble en ny geometri utviklet, såkalt ikke-euklidsk geometri, hvor de fire første aksiomene er oppfylt mens den bryter med det femte, også kalt parallell-aksiomet.

Aristoteles´ syllogistiske tankesett er like aktuelt den dag i dag. Alle nye teoremer som utvikles bygger på andre teoremer som igjen er basert på det enda mer grunnleggende. Slik kan det gås helt tilbake til aksiomene. Det kan synes å være en viss likhet mellom hvordan matematikere kommer frem til matematiske resultater i form av teoremer og teori om forståelsesutvikling (Pirie & Kieren 1994), hvor det ikke gås tilbake til aksiomer, men til en mer grunnleggende forståelse. (Se *folding back* i delkapittel 3.1)

Matematisk bevisføring var en fragmentarisk virksomhet frem til Euklid. Det kanskje mest kjente beviset, i hvert fall i skolematematikken, nemlig beviset for Pytagoras´ læresetning ble utformet ca. 200 år før Euklid. Dette resultatet var kjent lenge før grekernes storhetstid. Faktisk kan det spores tilbake 1000 år før Pytagoras, hos Babylonerne. Tidlig ute var man også i Kina og India hvor matematikken stod sterkt. I disse sivilisasjonene stod ikke bevisføringen særlig sentralt. Her dominerte induktivt resonnement og anvendelser av matematikken. Sammenhenger ble oppdaget på grunnlag av flere enkeltresultater og overbeviste dermed tilstrekkelig. Euklid var en av dem som ikke lot seg overbevise før det forelå et deduktivt resonnement til grunn. Pytagoras´ teorem var et slikt, og han fant selv en metode for å bevise dette, som han publiserte i *Elementene* (Euklid 1482, bok 1.46: 28), det mest innflytelsesrike verket i matematikken og kanskje verdens mest kjente fagbok.

På 1940-tallet startet utviklingen av datamaskiner noe som effektiviserte og gav nye muligheter, også innen matematikk. Disse maskinene baserte seg på ideer fra flere av 1800-tallets matematikere, blant annet George Boole, Charles Babbage, Augustus De Morgan og Gottlob Frege. Deres navn er knyttet til det som gjerne kalles *moderne logikk*. Ønsket de hadde var å fremstille logikken matematisk. Resultatet av dette gjorde seg gjeldende i form av *boolsk algebra* og *formal logikk*. Inspirert av Aristoteles´ holdninger til en påstand, altså at den må være enten sann eller usann, utviklet den boolske algebraen seg. Her kan variablene kun ha to verdier eller tilstander. I datamaskiner er disse verdiene bedre kjent som 0 og 1, der 0 står for *usant* og 1 betyr *sant*. Dette er essensielt i logiske kretser og for utviklingen av blant annet mikroprosessorer. Formal logikk er det mest grunnleggende, logiske system hvor utsagnene består av symboler. Eksempler på dette innen matematikken er $\forall$ (for alle) og $\exists$ (det eksisterer minst én). Slik forkortes språket og gjøres mer håndterlig for matematiske operasjoner.

2.3 Noen vanlige bevistyper

Når matematikere går i gang med sine bevis angriper de problemene fra ulike vinkler. Å føre et bevis er ingen standard prosedyre hvor det er gitt en klar fremgangsmåte. Med tiden har matematikere kommet frem til flere hensiktsmessige metoder som kan være til hjelp. Det har vist seg at de har ulike egenskaper som gjør at de passer bedre til noen problemer fremfor andre.

2.3.1 Direkte bevis

Ved denne type bevisførsel tas det som utgangspunkt at premisset i implikasjonen, hvilket skal bevises, er sant. Regning og argumentasjon danner grunnlaget for konklusjonen. Hvert steg som tas skal være velbegrunnet og markeres med en implikasjonspil ($\Rightarrow$). Om vi ser på Morris Klines forklaring av et deduktivt resonnement går tankene raskt til slike beviser.

> Deductive reasoning, then, consists of those ways of deriving new statements from accepted facts that compel the acceptance of the derived statements. (Kline 1972: 45)

2.3.2 Indirekte bevis

Denne bevistypen er strukturelt sett et direkte bevis, men skiller seg fra det ved at vi utnytter konklusjonen på en annen måte. Ideen er å anta det motsatte av det som skal vises, for deretter å vise at dette leder til en selvmotsigelse. Dermed er det galt at påstanden er gal og påstanden er bevist. Det indirekte bevis deles inn i to kategorier:

1) Kontrapositive bevis
2) Ad absurdum-bevis

Kontrapositive bevis baserer seg på at påstandene $A \Rightarrow B$ (A impliserer B) og det negerte, $\neg B \Rightarrow \neg A$ (ikke-B impliserer ikke-A), er ensbetydende. Ofte er det lettere å vise den negerte sammenhengen fremfor sammenhengen i seg selv og det er ved disse anledningene de kontrapositive bevisene benyttes.

Ved et ad absurdum-bevis stiller man seg «skeptisk» til konklusjonen og forsøker å bevise at det motsatte gjelder, det vil si at den negerte påstand er gyldig. Tanken er at resultatet skal bli en selvmotsigelse. Med andre ord: med den negerte påstand som utgangspunkt kan vi lage et korrekt resonnement som til slutt gir oss et resultat vi vet er usant. Siden dette resultatet er usant, må også selve utgangspunktet være usant. I korrekte resonnement kan det aldri utledes noe usant av sant. Det fulle navnet for bevistypen er *reductio ad absurdum*, latin for «reduksjon til noe meningsløst». *Reduksjon* svarer her til resonneringen som utføres frem til konklusjonen.

2.3.3 Bevis ved moteksempel

Dette er en av de mer kurante bevismetodene og som er enklest for elevene å tilegne seg (Solvang 1986, bind 2). På samme måte som i «virkeligheten» hvor det er mye vanskeligere å bygge noe enn å rive det ned igjen, gjelder det samme prinsippet i matematikken. For å motbevise en påstand er ett eneste unntak tilstrekkelig, så ved å finne et tilfelle hvor regelen ikke gjelder kan påstanden forkastes.

2.3.4 Induksjonsbevis

Når denne bevisformen blir forklart er prinsippet om dominobrikker som faller en vanlig sammenligning. Ideen bak induksjonsbeviset er å verifisere en generell gyldighet ved å starte med enkelttilfeller hvor utsagnet er korrekt og utvide disse tilfellene til det uendelige. Det må derimot ikke forveksles med induktiv arbeidsmåte, da sistnevnte er en arbeidsmåte hvor det gjennom eksperimenter kommes frem til kvalifiserte gjetninger, mens induksjonsbeviset følger et bestemt logisk mønster (Solvang 1992). Matematisk formuleres det ofte slik: la P(k) være en påstand som det skal bevises at gir sanne påstander for alle $k \in \mathbb{N}$ (naturlige tall). Det er to steg ved en slik bevisføring:

1) Det skal bevises at påstanden P(1) er sann, det vil si at *induksjonsgrunnlaget* er gyldig.

2) Overgangen $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ skal gjelde for ethvert vilkårlig tall $k \geq 1$, det vil si at *induksjonstrinnet* er oppfylt.

Dermed kan det vises at P(k) gjelder for alle $k \geq 1$, med andre ord hvis P(1) er sann, vil også P(2) være det, i likhet med P(3), P(4), P(5) og så videre.

2.4 Induktiv vs. deduktiv tankegang

I begrepsavklaringene ble *sannhet* omtalt som en generell enighet som har blitt forhandlet frem. Generell enighet innebærer derimot ikke at *alle* er enige. Et eksempel på dette er uenighet om den deduktive metodes slutninger. Dette betyr at ikke alle anser matematiske bevis som sanne i den forstand at de gjelder til evig tid og at det aldri blir forklart hvordan aksiomene slutningene bygger på har oppstått. Representanter for dette synet er Karl Popper, med sin falsifiseringsteori, og hans elev Imre Lakatos[8].

> The axioms and definitions frequently look artificial an mystifyingly complicated. One is never told how these complications arose (Lakatos 1976: 142).

Induktiv metode dreier seg om å tilegne seg kunnskap og trekke slutninger på grunnlag av en rekke enkelttilfeller. Denne metoden blir brukt innenfor naturvitenskapen hvor nye teorier utvikles, for deretter å styrkes eller forkastes, etter gjentatte målinger og eksperimenter. Ut i fra spesielle eksempler frembringes en generell regel. Solvang (1992) mener den induktive arbeidsmåten spiller en viktig rolle i forbindelse med utviklingen av elevenes operasjonelle

---

[8] Omtales nærmere i 3.2

kunnskaper. Metoden gir grunnlag for kvalifiserte gjetninger gjennom *plausible reasoning* som problemløsningens far, George Pólya, kalte det. Disse gjetningene må kontrolleres, for det er tåpelig å tro at en slik gjetning er et gyldig bevis, men det er også dumt å ignorere dem (Pólya 1990). Den induktive metode kan beskrives som flere faser, herunder en problemløsende, en oppdagende og en erfaringsbasert. I skolesammenheng kan dette representere elever som kommer frem til og formulerer «teoremer» som har blitt til ved prøving og feiling. En fordel med denne metoden er at lærestoffet kan bli elevenes eget og at kunnskapen dermed sitter bedre ved en slik aktivisering. Det er derimot en fare for at elevene kan betrakte alle slike «teoremer», basert på enkeltobservasjoner, som sanne. Det krever også at elevene er aktive i sin egen læringsprosess.

En slutning er logisk gyldig bare hvis gyldige premisser fører til en gyldig konklusjon. Dette gjelder ikke for induksjon. Induktive slutninger gir ikke nødvendigvis sanne konklusjoner. Et eksempel på dette er en slutning som sier at alt som slippes, faller. Dette gjelder ikke for ballonger med hydrogen- eller heliumgass. Selv om premissene er sanne, er det ingen logisk garanti for at konklusjonen som trekkes, er sann (Sjøberg 2005).

Deduktiv tenkning anvender logikk på gitte grunnantakelser, og ved hjelp av logiske prinsipper utledes resultater. Logikken alene derimot, kan ikke sikre at premissene i seg selv er sanne, men den kan bekrefte at konklusjonen er sann, gitt at premissene er sanne og resonnementet er gyldig (Chalmers 2006). I motsetning til induktiv metode utvikles her det enkelte fra det allmenne. Den deduktive metoden finnes på flere nivåer i skolematematikken (Solvang 1992):

1) Ved intuitive forestillinger

Matematikken, både i ungdomsskole og videregående skole, bygger på det intuitive. Både undervisning og lærebøker utelater begrunnelser for enkelte matematiske setninger fordi de regnes som «opplagte». Det deduktive aspektet på dette nivået gir Solvang et eksempel på (Solvang 1992: 124). To korder med samme lengde medfører at buelengdene, begrenset av skjæringen mellom endepunktene i hver korde og sirkelen, også er like lange. Elevene finner dette så opplagt at de ikke har behov for noe bevis. Solvang bemerker at setningen allikevel er formet som en implikasjon og at denne kunnskapen inneholder et klart deduktivt trekk selv om det ikke gjøres noen deduksjon i egentlig forstand. Deduksjonen bygger på intuitive forestillinger som aksepteres og anvendes umiddelbart etter en enkelt iakttakelse eller opplevelse. I tilfeller som dette, hvor setningen er så enkelt formet, synes elevene at den i seg selv uttrykker en utvikling fra premiss til konklusjon.

2) Ved bevisføringer

Bevisføring er svært betegnende for den deduktive siden av matematikkfaget. Føring av matematiske bevis krever stor grad av nøyaktighet og systematisk fremgangsmåte, og må tilpasses ulike alderstrinn. Jo yngre elevene er, desto kortere bør veien være fra premissene til konklusjonen. Bevisføring er ikke det eneste innslaget av deduktiv karakter i skolematematikken, men er typisk for den deduktive siden av faget.

3) Ved utledninger

Elevene møter to typer utledninger i skolematematikken. I forbindelse med løsninger av likninger og ulikheter samt utledninger av formler og setninger. Disse utledningene fører til setninger som ofte benyttes til beregninger, som er det mange elever legger mest vekt på og dermed overser bakgrunnen for hvorfor matematikken stemmer. En bedre forståelse av de bakenforliggende årsakene til utformingen av formlene kan også fremme elevenes ferdigheter i bruken av dem. Den deduktive metode ved *utledninger* har mye til felles med den deduktive metode ved *bevisføringer*. Solvang mener løsing av likninger og ulikheter samt bruk av regneregler representerer kanskje det sterkeste innslaget av deduksjoner i skolesammenheng.

Den deduktive tankemåten griper fatt i matematikkens struktur og er derfor viktig i utviklingen av den relasjonelle forståelse (Solvang 1992). Relasjonell forståelse innebærer en dypere innsikt i hvordan matematikken fungerer (Mellin-Olsen 1981). Gjennom slik erkjennelse når elevene et høyere nivå også ifølge Sfard (Sfard 1991). Elever kan også føle motivasjon ved deduktiv undervisning i situasjoner hvor de opplever mestring og progresjon i forhold til målene. Et slikt mål kan være å fullføre et matematisk bevis. Det er viktig at undervisningen vektlegger veien mot målet så vel som målet i seg selv.

3. Teori

3.1 Utvikling av matematikkforståelse

Alle kan lære hva som helst. Denne oppsiktsvekkende påstanden er en del av den behavioristiske teori, og som utvilsomt bidrar til et optimistisk oppdragelsessyn (Imsen 2003). Ideen bygger på at svært få av menneskets reflekser er medfødt, og at det øvrige av kunnskaper og erfaringer er lært. De intellektuelle forskjellene gjør seg kun gjeldende ved innlæringshastigheten, ikke ved hvor mye som kan læres. Mange vil nok si at dette er naivt. De fleste har hørt om matematikkvansker og hvilke problemer elever, som sliter med dette, har når de står overfor oppgaver som krever matematisk kompetanse. Begrepet *matematisk kompetanse* kan være verdt å se nærmere på. En definisjon på dette er:

> Matematisk kompetence består i at have viden om at udøve, anvende og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå.
>
> Matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensiktsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske utfordringer (Niss & Højgaard Jensen 2002)

Niss deler videre den matematiske kompetansen inn i åtte ulike delkompetanser knyttet til tankegang, problembehandling, modellering, representasjon, symbolbruk/formalisme, kommunikasjon, hjelpemidler og ikke minst *resonnement*. Matematisk resonnement innebærer, ifølge Niss, å tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnementer samt omforme antakelser og resonnementer til gyldige bevis. Denne kompetansen er blant de som utvikles senest skal vi tro annen forskning (Pirie & Kieren 1994, Sfard 1991).

Før det sees på barns utvikling av matematisk kompetanse og forståelse bør det klargjøres hva som menes med *matematisk forståelse*. Spørsmålet «hva er matematisk forståelse?» er et gjennomgående tema i *Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it?* (Pirie & Kieren 1994) Artikkelen benytter flere modeller for å beskrive denne problemstillingen, og legger særlig vekt på eksempler ved bruk av brøkbegrepet. Når det gjelder bevis kommer forfatterne inn på dette i de høyere trinnene i utviklingen av matematikkforståelsen. De deler menneskets utvikling av forståelse inn i åtte ulike nivåer som jeg tolker og oppsummerer på følgende måte:

Primitive knowing beskrives som startstedet og utgangspunktet for utviklingen av matematikkforståelse. Når vi lærer noe nytt er det her vi begynner vår tankevirksomhet. Ordet «primitiv» er her å forstå på en annen måte enn i det daglige språket. *Primitive knowing* innebærer hva det antas at vi er kapable til innenfor et område i en oppstartsfase. Ved innledningen til matematiske bevis som nytt tema innehar elevene allerede kunnskaper som kan være til nytte for den videre læringen av bevis, for eksempel logikk. Disse kunnskapene kan være avanserte, men er primitive i den forstand at de ikke er særlig utviklet innenfor det nye emnet som skal læres. Før elevene lærer om algebraisk bevisføring kan de fra tidligere ha et solid fundament innen geometriske bevis som kan bygges videre på. Videre utvikles evner til å bruke eksisterende kunnskap i nye situasjoner og danne seg visuelle representasjoner. Deretter blir man i stand til å utføre operasjoner med tall uten å knytte tallene til noe konkret. Etter hvert får man et større perspektiv på matematikken og kan kombinere og tilpasse sine «bilder» for å overvinne matematiske problemer. Det er da mulig å bygge en bro mellom ulike områder i faget, noe som gir elever et større repertoar å spille på når de skal løse oppgaver. Senere i utviklingen kan man reflektere over egen kunnskap, se mønstre som gjentar seg og formulere egne formler og teoremer, samt utvikle nye teorier ut ifra observasjoner. I tillegg kan teoremer og regler sees i en større sammenheng, før man kommer til det siste nivået som artikkelforfatterne kaller *inventising*. (*Invent* eng. *å oppfinne*.) Her har forståelsen kommet til et stadie hvor man kan stille spørsmål for utvikling av nye ideer og kunnskap. Personer som beviser nye teoremer og tilfører ny kunnskap har oppnådd dette nivået innenfor et område, men som nevnt innledningsvis er det fullt mulig å bevise påstander fra andre områder i matematikken før dette nivået nås. Som eksempel kan det nevnes elever som befinner seg på *inventising*-nivået innen derivasjon. Dette nivået danner grunnlaget for utviklingen av høyere kunnskap innen integrasjon og vil være *primitive knowing* innenfor dette feltet.

Hvert kunnskapsnivå utenfor *primitive knowing* er bygget opp av komplementariteten *acting/expressing*. Hvert av disse aspektene for kunnskapsutvikling er nødvendig før man kan komme til neste nivå. Videre utvikling skjer ved først å *utføre* (acting) for deretter å *uttrykke* (express), men ofte også ved å gå frem og tilbake mellom disse. I tillegg til å kunne utføre en handling vil det også være behov for å formulere et problem.

To sentrale begreper som Pirie og Kieren nevner er *folding back* og *don´t need boundaries*. *Folding back* er en følge av et møte med et problem man ikke klarer å løse med en gang. Ved å gå tilbake et eller flere nivåer kan den utilstrekkelige forståelsen utvides og løsningen på problemet kan være et skritt nærmere. *Don´t need boundaries* henspeiler på ”grenser” hvor en person som er over dem, er i stand til å arbeide med begreper som ikke lenger er knyttet til tidligere former for forståelse. For eksempel vil det ikke være nødvendig å referere til et ”bilde” av et matematisk begrep for en som i utgangspunktet har en forståelse for dette. Det kan derimot være en fordel i en *fold back*-situasjon.

Når vi skal beskrive menneskets intellektuelle utvikling er det verdt å nevne Piaget og hans nomotetiske teori som beskriver fellestrekk og alderstypiske kjennetegn. Piagets fremste mål med sitt arbeid var å finne frem til kunnskapens struktur som han mente ville komme til syne ved å undersøke hvordan den blir konstruert. Den intellektuelle utviklingen skjer gjennom ulike stadier hvor de kognitive strukturer, de mentale redskaper for erkjennelse og kunnskap endres (Jørgensen 2007). To sentrale begreper innen Piagets teori er *assimilasjon* og *akkommodasjon*. Dette er to prosesser hvor våre kunnskaper og forestillinger blir gjenstand for revisjon. Ved *assimilasjon* støter vi på en ny type problem som vi er ukjente med og forsøker derfor å tilpasse denne nye situasjonen ved å benytte kunnskaper og erfaringer vi kjenner til fra før. Imsen bruker Piaget-terminologi:

> Nye inntrykk *tilpasses* de skjemaene[9] barnet har fra før. (Imsen 2003: 91)

Dette fungerer bare til et visst punkt. Før eller senere er vi nødt til å tilpasse våre tidligere oppfatninger slik at de passer bedre i den nye konteksten. Dette er *akkommodasjonsprosessen*. Disse prosessene beskriver ikke bare barns utvikling i ung alder. Ser man på tallenes historie har man hatt en enorm utvikling fra de naturlige tallene og frem til de komplekse. Pytagoras uttalte «alt er tall». Med tall mente Pytagoras de naturlige tallene ($\mathbb{N}$). Pytagoreerne anså tall som grunnlaget i universet. Alt kunne telles, inkludert lengder. For å måle lengder var det nødvendig med et mål. De antok derfor at et slikt mål alltid eksisterte, og for hver gang et mål ble funnet i et problem, ble det regnet som den udelelige enhet. På bakgrunn av dette måtte det eksistere et mål som gjorde det mulig å telle både siden og diagonalen i et kvadrat. Antakelsen om at dette målet alltid eksisterte viste seg å ikke være sant. Siden og diagonalen er såkalt *inkommensurable*, det vil si at de ikke har noe felles mål. Denne oppdagelsen skjedde ca. 430 f. Kr. og dannet grunnlaget for kunnskapen

[9] Indre representasjoner av handlingsmønstre (Imsen 2003)

om irrasjonale tall (Katz 1998). Den gamle kunnskapen gikk gjennom en akkommodasjonsprosess og ble mer mangfoldig. Ved slike prosesser ble også de negative og komplekse tallene til. Den vitenskapelige ballasten de hadde strakk ikke til alene.

Innen matematikkdidaktikken er Anna Sfards teori om matematiske begrepers dualitet særlig kjent, (Sfard 1991) og beskriver utviklingen av en mer helhetlig forståelse av matematikken. Denne dualiteten innebærer at matematikkens ulike termer kan forstås eller betraktes på to måter: som *prosess* og *objekt.* Det å se på matematiske begreper som en prosess, et *operasjonelt* perspektiv, vil si at utførelsen eller operasjonen er det sentrale. Ifølge Sfard utvikles de operasjonelle begrepene først, deretter de strukturelle. Læringen bør også derfor organiseres deretter. Med tanke på temaet i oppgaven betyr dette at lærere bør være varsomme med undervisning i matematiske bevis på et for tidlig stadium, da dette krever en del kunnskaper og ferdigheter som bør læres på forhånd, noe også læreplaner har bemerket[10]. Dette betyr ikke at elever i ung alder skal skjermes for denne type undervisning. Barn innehar *primitive knowing* i bevisføring, representert ved for eksempel oppfattelse av mønstre og logisk tenkemåte, og kan ha utbytte av noe innføring i tankegangen. Men for å oppnå strukturell kunnskap, som rangeres høyest, må den operasjonelle ligge i bunn, da den danner grunnlaget for mer helhetlig forståelse. Gagné beskriver hvordan kunnskap bygger på kunnskap (mursteinsprinsippet) og dermed utvikler seg videre (Imsen 2003). I artikkelen *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin* påpeker Sfard at, fra hennes synspunkt, synes den generelle oppfatningen av den operasjonelle kunnskapen å være noe underordnet den strukturelle, da det sies:

> Even though everybody admits that «algorithmic» mathematics is important, the opinion seems to prevail that it is somehow second-rate[11]. (Sfard 1991: 9)

Videre antyder Sfard at den matematiske begrepsforståelsen ikke er fullstendig før en person har etablert både et operasjonelt og strukturelt forhold til termene vedkommende møter. Det strukturelle og operasjonelle er i tillegg komplementære, det vil si at de utfyller hverandre og kan heller ikke skilles. For å utføre en prosess trenger man et objekt å utføre det på. Sfard trekker en parallell til fysikken og sammenligner dette med hvordan man kan forestille seg

[10] Se kapittel 5.2 *Lov om høiere almenskoler av 10. mai 1935*

[11] Påstanden støttes blant annet i artikkelen *Problemløsning eller matematiske idéer i undervisningen* (Laksov 1993).

bevegelse uten fysiske objekter. Det hun ønsker å understreke med dette er at vår forestillingsevne og fantasi er formet fra sansene våre.

Med den operasjonelle forståelsen som fundament kan det bygges videre på denne for å oppnå mer helhetlig kunnskap. Sfard deler inn denne ferden mot strukturell kunnskap i tre faser: i*nteriorization, condensation* og *reification*. De tre fasene, eller stegene, er bygd opp hierarkisk, det vil si at trinnet over ikke kan nås uten at trinnet under er oppnådd. I dette tilfellet betyr det at *reification* ikke kan nås uten at *condensation* allerede er til stede.

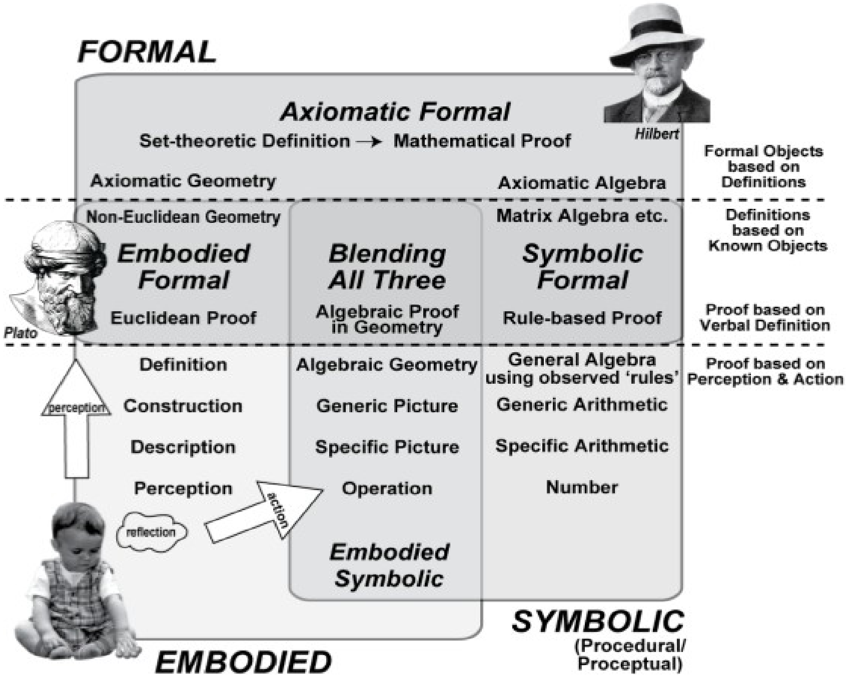
Interiorization skjer når man blir kjent med prosessene til et nytt begrep, man møter noe og får det på innsiden/gjør seg kjent med det. (*Interior* eng. *innvendig*). Ved *condensation* blir personen i bedre stand til å betrakte en gitt prosess som en helhet. Evnen til å sammenligne og generalisere utvikler seg også i denne fasen. *Condensation*, eller kondensering som det heter på norsk, betegner en samling/fortetning av noe. Analogt: kunnskapene vi har samler og systematiserer seg hvilket medfører at et nytt begrep offisielt kan dannes. Til slutt har vi *reification* hvor vi etter en kontinuerlig prosess utvikler en evne til å se noe vi allerede kjenner til i et helt nytt lys. Dette nye perspektivet gir oss synet på begreper som objekter i tillegg til prosessbegrepet vi allerede kjenner til. Sett i sammenheng med barnets utvikling kan en slik åpenbaring være når det innser at telleoperasjonen, som er en prosess, knytter seg til tallbegrepet som er objekter. Tall er reifisert telling. Et vesentlig steg mot en høyere forståelse er tilbakelagt.

Matematikeren og psykologen Richard R. Skemp nevner noen alternative tilnærminger til vår begrepsutvikling (Skemp 1987). I den virkelige verden lærer vi oss å skille ting fra hverandre gjennom hvordan de ser ut og hvilke kjennetegn de har. Aktiviteten hvor man blir oppmerksom på likheter blant tidligere erfaringer kaller Skemp for *abstracting*. En *abstraction* er en varig endring på det mentale plan som gjør oss i stand til å gjenkjenne nye situasjoner på bakgrunn av likheter vi kjenner fra tidligere. Det å samle våre erfaringer på grunnlag av disse likhetene kaller han for *classifying*. Dette er nært knyttet til Piagets assimilasjons- og akkomodasjonsprosess.

Matematikklærerens høyeste ønske er at elevene skal finne gleden i matematikken og se faget fra et nytte- og estetisk perspektiv. Veien til dette målet kan det dog være uenigheter om. En av vinnerne av Abel-prisen fra 2008, Jaques Tits, uttalte i et intervju i forbindelse med overrekkelsen av prisen at han frarådet oppmuntring av elever som slet med matematikken. De ville møte store problemer senere, mente han. Abel-prisvinneren fra 2003, Jean Pierre Serre gikk enda lengre i sine ytringer og hevdet at man burde motarbeide elevenes interesse for matematikk. Dette for å finne ut hvem som virkelig var interesserte og for dermed å kunne «skille klinten fra hveten». Lærere med denne type praksis må kunne sies å være i mindretall. En vanligere tilnærming til faget, blant lærerne, er å innlede timene med det velkjente sitatet «matematikk er gøy!» Det er uansett ingen tvil om at læreren også spiller en betydelig rolle når det gjelder barns holdninger til matematikken og utvikling av matematikkforståelse, noe Skemp også understreker (Skemp 1987). Fra R94 ble det sagt at utgangspunktet for oppøvelsen av matematikkforståelsen burde være praktiske og meningsfylte situasjoner. Oppgavene og problemene skulle være realistiske for at de skulle ha en mer motiverende effekt på elevene, noe som til tider gjorde utformingen av eksamen problematisk (intervju Lindstrøm). Den positive betydningen av slike oppgaver nevnes også i litteratur (Mellin-Olsen 1981). *Bevis* er et tema hvor det kan være vanskelig å se de umiddelbare anvendelsesområdene, men som mange mener i høyeste grad er med på å utvikle en relasjonell forståelse av matematikken (Hanna 2008, Rav 1999, Dawson 2006, Corfield 2003).

Tall (2009) utviklet en modell (figur 1) med tre matematiske «verdener» for hvordan barn utvikler forståelse for matematiske bevis. Jo høyere barnet befinner seg i modellen, desto lengre har det kommet i den kognitive utviklingen. I den første fasen læres det ved iakttagelser, berøring og eksperimentering. Denne fasen inngår i den «legemlige verdenen» (eng: *embodied world*) som legger grunnlaget for læring i Euklids bevis og bevis innen ikke-euklidsk geometri. Det neste steget i utviklingen er i den «symbolske verdenen» (eng: *symbolic world)*. Her brukes telleevnen til å opparbeide kunnskap i aritmetikk, tallmønstre og senere algebraiske bevis. Spesifikke utregninger barn foretar seg gir grunnlag for ideer til generelle regler. Det tredje utviklingstrinnet innebærer at barnet får oppgitt grunnreglene, eller definisjonene, og ikke nødvendigvis utvikler dem gjennom egen erfaring. Deretter skal bevisene utvikles på grunnlag av disse reglene. Dette er den aksiomatiske, strenge «formelle verdenen» (eng: *formal world*). David Hilbert var en av grunnleggerne av den moderne bevisteorien og representerer denne «verdenen».

Figur 1:



Figur 1: Den kognitive utviklingen av bevis gjennom tre mentale matematiske verdener. (Tall 2009: 3)

Felles for de tidligere nevnte teoretikerne er at de beskriver hva som skjer når vi står overfor noe nytt. Bevis er for mange elever en helt ny måte å tenke på når de møter temaet for første gang. Argumentasjon, generelt, er for mange elever uvant. Å forklare elever at de sitter med fasiten i «vis at»-oppgaver er ikke alltid like enkelt (intervju lærer 2). De ukjente problemene som oppstår i nye situasjoner er en del av hindrene vi møter i vår utvikling av matematikkforståelse. Samtidig er de nødvendige for å bli bedre og gi oss bredere og dypere kompetanse. Piaget nevner assimilasjons- og akkommodasjonsprosessen, Pirie og Kieren påpeker betydningen av *folding back*, Skemp omtaler *abstraction* mens Sfard gir oss alternative måter å betrakte matematiske begreper og temaer. Ut i fra teorien kan vi antyde en nær tilknytning mellom utviklingen av den matematiske forståelse og nye situasjoner som oppstår. Konstruktivistene beskriver dette som en tilpasningsprosess hvor vi lærer noe nytt på grunnlag av det vi allerede vet. Vi kan trekke en parallell til teknologien som utvikler seg fra det primitive til mer avanserte hvor vi benytter oss av tidligere teknologi for å utvikle ny. Slik kan også utviklingen av matematikkforståelse forstås, men her med en annen betydning av ordet «primitiv».

3.2 En drøfting av matematiske bevis

Helt siden grekernes filosofiske glansperiode har deduktiv resonnering vært ansett som kanskje den høyeste form for tenkning. I matematikken har det deduktive vært, og er, en del av fagets egenart. Matematikere som arbeider med ren matematikk er ikke opptatt av anvendelsene deres virke fører frem til, men drives av selve gleden med prosessen. Arbeidet gir mening i seg selv og drives av en sosial fornuft, *S-fornuften* (Mellin-Olsen 1981). Bevis og bevisføring inngår i denne kategorien, men det er altså ikke helt entydig hva begrepet matematisk bevis innebærer og dette kan få betydning for bevisets rolle i undervisning. Intuisjonismen gir, som omtalt i forrige delkapittel uttrykk for et alternativt syn på bevis, og opererer med en annen logikk enn den aristoteliske der ting enten eksisterer eller ikke. Intuisjonistenes logikk kan ikke sies å være mindre korrekt, men de har ikke noe forhold til absolutte sannheter som matematiske bevis er, tradisjonelt sett. Ved drøftingen av bevis som undervisningstema kan intuisjonistene være representert på begge sider i diskusjonen som alle andre, men ad absurdum-bevis vil de stille seg kritiske til.

Legitimering av fag er en sentral del av matematikkdidaktikken, og fagdidaktikken generelt, som tar for seg spørsmål knyttet til hvordan undervisningen og læringen bør foregå. For mange elever kan bevis oppfattes som unødvendig og lærere sliter med å motivere disse elevene. Mange forskere har stått frem for å understreke betydningen av deduktive resonnementer og bevis. Gila Hanna har i flere år frontet en undervisning i skolen med vekt på matematiske bevis. Dette temaet blir av mange regnet som vanskelig. Hun hevder at det er et kjent faktum at elever og studenter har vanskeligheter med å føre enhver form for argumenter (Hanna 1996). Det samme slås fast i annen forskning (Blomhøj & Kjeldsen 2007). Et matematisk bevis er en stringent form for resonnering og argumentasjon som stiller særskilte krav til nøyaktighet. Problemene knytter seg som regel til at det må tenkes mer selvstendig enn hva som kreves i regning og generell aritmetikk. Mange klarer heller ikke skille matematiske bevis fra det som er intuitivt opplagt, og ser ikke poenget i å bevise noe de føler seg sikre på at er sant. Et eksempel kan være å bevise at to kontinuerlige funksjoner med grafer som krysser hverandre, må ha et skjæringspunkt. Hanna forsvarer bevisets plass i læreplanen ved å påpeke dets betydning i matematikken og at det er et verdifullt redskap for å fremme matematisk forståelse. Et annet argument for undervisning i bevis, som Hanna nevner, er at gyldigheten av konklusjonen i beviset kommer fra beviset selv, og ikke fra en ekstern «fasit». På denne måten kan elevene derfor arbeide mer selvstendig og utvikle logisk korrekte svar. Hanna sier det slik:

> Proof conveys to students the message that they can reason for themselves, that they do not need to defer authority. Thus the use of proof in the classroom is actually anti-authoritarian (Hanna 1996).

Dette sitatet var en reaksjon på påstanden om at bevisføring i klasserommet var autoritært, i betydningen av at læreren bestemte hva som var korrekte og ukorrekte resonnement. Avslutningsvis slår artikkelen fast at til tross for de store utfordringene elevene møter i bevislæren kan vi ikke unngå dette hinderet. I siste linje slås det fast:

> We need to find ways, through research and classroom experience, to help students master the skills and gain the understanding they need. Our failure to do so will deny us a valuable teaching tool and deny our students access to a crucial element of mathematics (Ibid.).

Det at bevis ikke bare dreier seg om å overbevise, men også har et heuristisk perspektiv omtales i en annen av Hannas artikler *Beyond verification: Proof can teach new methods* (Hanna 2008). Bruken av bevislære i klasserommet er ifølge Hanna en stor fordel da det gir elever nye matematiske teknikker. Hun viser til flere forskere (Mariotti 2006, Corfield 2003, Dawson 2006 & Rav 1999) som hevder at å bevise matematiske påstander er bærebjelken i matematisk kunnskap og at det utvider elevenes «verktøykasse». Videre viser Hanna til seks punkter skrevet av NCTM[12] 1998, den innflytelsesrike matematikklærerforeningen i USA, og EDC[13] for hvorfor det skal undervises i bevis:

1) for å etablere sikre fakta
2) for å oppnå forståelse
3) for å formidle ideer til andre
4) for utfordringens skyld
5) for å skape vakker matematikk, i betydningen av å utvikle elegante bevis som overrasker eller gir ny innsikt
6) for å konstruere en større matematisk teori

Hanna kritiserer det faktum at ingen av disse punktene nevner bevisets bidrag til å utvikle nye metoder og strategier i matematikk og problemløsning. To eksempler nevnes, et med

[12]The National Council of Teachers of Mathematics

[13]The Education Development Center

teleskoperende rekker og et med Euklids bevis for at det ikke eksisterer et høyeste primtall, hvor bevisteknikkene og ideene som benyttes kan forsterke elevenes «bevisrepertoar». Til slutt konkluderes det med:

> It offers an opportunity to make new connections between the process of proving and mathematical techniques, and also gives us an additional reason for keeping proof in the mathematics curriculum (Hanna 2008: 4).

«It» refererer til anseelsen av bevis som fremmende for nye matematiske teknikker. Hannas to artikler er en reaksjon på læreplanenes nedprioritering av bevis i Nord-Amerika de siste tretti årene. Skal vi tro Maria A. Mariotti kan det tyde på at beviset i større grad er på vei tilbake (Mariotti 2006). Et tegn på at dette gjelder internasjonalt er at TIMSS Advanced-oppgavene fra 2008 inneholder to oppgaver med bevis som tema. I oppgave 29 (IEA[14] 2008, hefte 1) skal det bevises at diagonalene i et parallellogram halverer hverandre, mens det i oppgave 28 skal forklares hvilke steg som må tas i prosessen ved et induksjonsbevis. I *Proof and Proving in Mathematics Education* (Mariotti 2006) innleder Mariotti med tegn på at bevis nå ser ut til å vies mer plass. Det vises til et sitat i NCTM[15] som sier at bevis bør være et naturlig, gjennomgående tema i klasseromsdiskusjoner, uavhengig av hva som undervises.

> Reasoning and proof are not special activities reserved for special times or special topics in the curriculum but should be a natural, ongoing part of classroom discussions, no matter what topic i being studied. (NCTM, 2000: 342 i Mariotti 2006)

Dette tyder på at bevis ikke skal være forbeholdt enkeltemner eller spesielle anledninger og at alle skal delta i aktiviteter med bevis. Ideen om «proof for all», som Mariotti kaller det, har derimot ikke full støtte. Hun hevder lærere i flere land, blant annet Italia, Frankrike og Japan ikke deler dette positive perspektivet på undervisning i bevis. Temaet er for vanskelig til at alle kan lære det. I utarbeidelser av læreplaner er det mye diskusjon om hva som skal være «matematikk for alle». Nettopp dette synet, at bevis er for vanskelig, er et argumentent som blant andre Gila Hanna møter når de taler for mer bevis i skolen. Mange finner det mer hensiktsmessig med undervisning i matematikkens anvendelsesområder[16]. Elevene klarer ikke skille mellom matematisk validering og validering ved «sunn fornuft». Alle er heller

[14] International Association for the Evaluation of Educational Achievement

[15] National Council of Teachers of Mathematics

[16] En utdyping av uenigheter rundt ren versus anvendt matematikk beskrives i seksjon 5.1.1

ikke enige i Hannas ytringer om bevisets betydning utover verifiseringen. Mange forskere og undervisere har fått øynene opp for en del av Lakatos´ tanker og ser ingen grunn til at beviset skal være så sentralt i matematikken eller at bevisføring skal gi noen større matematisk innsikt (Hanna 1996). De senere årene har det også vært diskutert om et matematisk bevis må være dannet på grunnlag av deduktiv tenkning eller om det kan aksepteres ved andre metoder. Det mest berømte eksempelet er beviset for firefargeproblemet. Skjønt ikke alle er enige i at det kan kalles et bevis. I tillegg til en tradisjonell deduktiv tilnærming hvor det ble avklart at det var veldig mange tilfeller som måtte undersøkes, har løsningen her blitt til ved hjelp av store numeriske beregninger i datamaskiner. Hvis vi kan stole på et slikt bevis ser mange ingen grunn til å måtte gjennomgå en så stringent prosess som bevisføring har vært i alle år. I skolesammenheng brukes programmer som Cabri og Geogebra hvor geometriske visualiseringer kan overbevise mange og enhver om det meste. Spørsmålet om slike datamaskinbevis er gyldige vil jeg ikke gå nærmere inn på her, men det er et argument som brukes i forbindelse med hvor stringent bevisføring skal være i skolen. Dessuten er det de som mener at bruk av dynamisk programvare som Cabri og Geogebra kan utvikle elevenes innsikt og inspirasjon for deduktiv argumentasjon (Guven 2008). Michael de Villiers ved universitetet i Durban-Westville, forsøker å forene den tradisjonelle og moderne, teknologiske bevisføringen. Han mener bevis ikke skal introduseres som et verifiseringstema. Derimot foreslår han bruk av dynamisk programvare som et første møte med beviset som i begynnelsen skal dreie seg om å overbevise elevene. Senere kan man tilnærme seg mer og mer en deduktiv tenkning, slik Guven (2008) også beskriver det, og til slutt føre bevis som gir «absolute certainty» (de Villiers 2002). Forståelsen for beviset må modnes før det kan brukes til å bekrefte hypoteser og teorier.

En vanlig kritikk av den deduktive tilnærmingen til geometrien innebærer at de fleste oppdagelser skjer ved intuitiv tenkning og empiriske metoder. Lakatos (1976) nevner også dette:

> Mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and critisism, by the logic of proofs and refutations. (Lakatos 1976: 5)

Her fremheves viktigheten av det induktive resonnementets rolle for utvikling av ny matematikk. Betydningen av induktiv tenkning presiseres også i norske læreplaner[17]. Det er

[17] Se delkapittel 5.3 *Læreplan for den videregående skole 1976* og delkapittel 5.4 *Læreplanverket for videregående opplæring (R94)*.

ingen grunn til å bevise når det er tilstrekkelig å overbevise, med andre ord: induktiv tenkning kan være vel så bra som deduktiv i utarbeidelsen av nye matematiske resultater.

I artikkelen *Deductive reasoning: in the eye of the beholder* belyses uenighetene rundt deduktive resonnementers verdi utenfor matematikken (Ayalon & Even 2008). På den ene siden vises det til Descartes og Popper som mente deduktiv resonnering var uvurderlig for naturvitenskapelig arbeid. I nyere tid har professor Hung-Hsi Wu ved universitetet i Berkeley understreket at også innenfor rettssystemet, politikk og økonomi er dette av stor betydning (Ibid.). Evne til å være systematisk og strukturert er begrunnelser som blir benyttet i argumentasjonen for læring av deduktiv tenkning. Flere internasjonale læreplaner omtaler denne kognitive virksomhet i positive ordlag. Artikkelen trekker frem Australia, Israel og New Zealand. I tillegg refereres det til NCTM (1989 og 2000) samt QCA[18] (2006).

På den andre siden finner vi forskere som hevder at en opplæring i deduktiv tenkning ikke bærer med seg noe av verdi utover det matematikkrelaterte (Hanna 1996). I en debatt eller annen kontekst utenfor matematikkfeltet hvor man skal prøve å overbevise en annen part benyttes ofte induktive begrunnelser som virker sannsynlige. Deduktiv tenkning bør ikke overvurderes ifølge denne oppfatningen. Den evolusjonære psykologien er mer ekstrem og advarer mot at tenkning umiddelbart skal knyttes til logikk, da det her hevdes at det er en konflikt mellom formell matematisk og naturlig tenkning. Ayalon og Even (2008) belyser dette med et eksempel fra Leron (2004) som viser til undersøkelser der bruken av «hvis...så» og «hvis og bare hvis» blir tolket likt. Ved bruk av matematisk notasjon tilsvarer dette at $\Rightarrow$ $= \Leftrightarrow$. I dagligtalen kan dette virke helt greit og brukes likt, men i matematikken er det fundamentalt galt. Hvis det snør, så er det kaldt ute. Men det snør ikke hvis og bare hvis det er kaldt ute, siden det ikke nødvendigvis snør om det skulle være kaldt.

Et slikt syn på bevis og deduktiv resonnering som evolusjonspsykologene og andre kritikere representerer, i tillegg til det faktum at elever sliter med all form for argumentasjon, taler imot at beviset skal ha en viktig plass i skolen. Det strides blant de lærde, herunder forskere, psykologer og didaktikere, om hvilken rolle beviset og bevisføringens har ut ifra et dannelsesperspektiv. Elever skal øves i argumentasjon, men om deduktiv tenkning er måten å gjøre det på er det langt fra enighet om. Dersom fremtidig forskning med sikkerhet kan fastslå at deduktivt arbeid ikke utvikler mer generelle ferdigheter kan det bli vanskeligere å legitimere bevisteori i skolesammenheng. En betraktning av Mariottis artikkel tyder derimot

[18] Qualifications and Curriculum Authority

på at læreplanene i enkelte land har vært utviklet litt etter hva som er på «moten» og at det nå begynner å bli mer «in» igjen etter noen års, mer eller mindre, uteblivelse.

Historien har gitt oss eksempler på dette, noe doktoravhandlingen til Johan Prytz ved universitetet i Uppsala omtaler. I denne avhandlingen, *Speaking of geometry*, poengteres det at aksiomatisk geometri frem til ca. 1900 var høyt aktet i Europa og USA. Det ble sett på som en utmerket metode for trening i resonnering, en akademisk respektert aktivitet på denne tiden og som skulle være karakterbyggende (Prytz 2007). I Storbritannia kom etterhvert et sterkere ønske om mer anvendt matematikk. En gruppe kalt Perry-movement, anført av matematikklæreren John Perry, stilte seg skeptiske til nytten av ren matematikk og effekten den hadde til å utvikle ferdigheter i resonnering. Aksiomatisk arbeidsmetode fikk lavere status og fikk også dermed en mindre rolle i skolen. ICMI[19] ble dannet på denne tiden (1908) og utvekslingen av ideer og undervisningsteorier mellom land økte voldsomt. Dette medførte at bevisets lave status spredte seg rundt omkring i verden. En annen årsak til en mer praktisk bruk av faget gjorde seg gjeldende under den kalde krigen. På denne tiden var opprusting viktig og dermed også anvendt matematikk. Den aksiomatiske, deduktive teorien ble derfor nedprioritert i flere land.

En av skolens hovedoppgaver er knyttet til vurdering. Elevene skal få tilbakemelding på hvordan de presterer og ligger an i faget. En forutsetning for vurdering er at elevene må kunne testes i emnet de har hatt undervisning. På tilsvarende måte er det viktig at emnet kan vurderes for at det skal undervises. To viktige underspørsmål ved vurderingsbegrepet er hva som er gjenstand for vurdering og mot hvilke kriterier vurderingen skjer (Engelsen 2006). Når det undervises i bevis må det utarbeides vurderingskriterier som skal si noe om elevenes kompetanse på feltet. Lite kunnskaper om hvordan lærere skal vurdere elevenes bevis kan føre til at bevisets rolle blir mindre eller borte fra læreplanene.

Undervisningens hensikt er at elevene skal oppnå læreplanens fastsatte kunnskapsmål, men eksamen har også stor innflytelse på hva elevene lærer. Eksamen bygger på læreplanmålene, men kan naturlig nok ikke dekke alle disse og dette medfører at en del lærere prioriterer emner de anser som mer relevante med tanke på eksamen. En studie av hva som har vært fokus ved eksamensoppgavene gjennom årenes løp gir en pekepinn på læreplanenes satsing innenfor de ulike områdene. Undersøkelser har vist at lærebøkene til dels er vel så veiledende for undervisningen som læreplanene.

[19] The International Commission on Mathematical Instruction

4. Metode

4.1 Generelle forskningsmetoder

Innenfor samfunnsvitenskapelig forskning finnes to hovedkategorier: *kvalitativ* og *kvantitativ* forskningsmetode. Den kvalitative metode ble i flere år «skjøvet vekk» og den kvantitative metoden var i høysetet (Holter i Holter & Kalleberg 2007). Kvalitativ forskningsmetode blir benyttet i situasjoner hvor det er ønskelig med detaljerte og fyldige beskrivelser fra et begrenset utvalg av informanter, fremfor begrenset dybdeinformasjon fra et større utvalg. Dybdeintervju, feltarbeid og etnografiske studier identifiseres ofte med kvalitativ metode (Ragin 1994). Denne tilnærmingsmåten har stor fleksibilitet og søker kunnskap om menneskers erfaringer, opplevelser, tanker, forventninger, livsverden og holdninger. Fordeler ved metoden er at ved intervju har informanten mulighet til å utdype sine svar og meninger i tillegg til at både intervjuer og informant kan komme med oppfølgingsspørsmål. Ulempene er blant annet knyttet til at slutninger ikke kan generaliseres, da utvalget ikke er representativt. Ved intervjuer hvor intervjuobjektets identitet kan spores opp er det også en mulighet for at svarene ikke nødvendigvis er ærlige, for eksempel i situasjoner der svar kan anses som politisk eller strategisk ukorrekte.

Det finnes ulike former for kvalitative intervjuer. Det *ustrukturerte intervjuet* har åpne spørsmål om et gitt tema. Spørsmålene kan tilpasses den enkelte intervjusituasjonen, rekkefølgen og formuleringen av spørsmålene er ikke bestemt på forhånd. Dette intervjuet fortoner seg som en samtale. Et *semi-strukturert intervju* har definerte temaer som det skal spørres om, men kan veksle frem og tilbake mellom spørsmål og temaer og rekkefølgen kan også her endres. Her benyttes en intervjuguide som er en liste med spørsmål og temaer intervjueren håper å få svar på i løpet av intervjuet for å belyse sine forskningsspørsmål. Ved hjelp av underspørsmål og oppfølgingsspørsmål utdypes de ulike temaene. Som regel har spørsmålene en bestemt rekkefølge, men kan endres underveis hvis respondenten trekker frem andre relevante emner. Ved bruk av et *strukturert intervju* er spørsmålene fastsatt med en bestemt rekkefølge. På denne måten kan svarene fra de ulike informantene sammenliknes.

Oppgaven benytter ikke kvantitativ metode og vil derfor i liten grad beskrive denne metoden. Kort sagt kan det sies at kvantitativ forskningsmetode prioriterer større utvalg fremfor dybdekunnskap og kan ved å telle opp antall forekomster kartlegge utbredelse (Johannesen mfl. 2007). Metoden egner seg til å teste årsakssammenhenger, ved testing av hypoteser eller når det er ønskelig med breddekunnskap. Det er lettere å få et inntrykk av generelle holdninger i store befolkningsgrupper og det tas sikte på å kunne forklare ulike fenomener. For å klargjøre læreres syn på bevis, som yrkesgruppe, ville det vært naturlig med bruk av spørreskjema til et representativt utvalg av lærere. For meg var det i større grad ønskelig å vite mer om de bakenforliggende årsakene for enkelte læreres standpunkter. Ved bruk av kvalitative intervju var det også mulig å få dybdeinformasjon om disse lærernes undervisningspraksis og vurdering i faget. I tillegg virket det mest fornuftig med tanke på tiden jeg hadde til rådighet.

4.2 Metodevalg og begrunnelse for valg av metode

Oppgavens to hovedkomponenter er knyttet opp mot henholdsvis bevisets rolle i ulike læreplaner og erfarne, praktiserende matematikklæreres syn på bevis i undervisningen. På bakgrunn av problemstillingen og forrige delkapittel falt metodevalget på dokumentanalyse og semi-strukturert intervju. Dokumentene er læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver som går tilbake til 1896. Dette er materiale som har stor betydning for undervisningen. Analysen av dette materialet gjør det mulig å få svar på hvilken plass bevis har hatt i den formelle og oppfattede læreplan gjennom årenes løp.

Oppgaven avdekker ingen kausale sammenhenger og siden den beskriver, fremfor å forklare, falt valget på et deskriptivt forskningsdesign. Forskningsdesignet avgjør hvordan det skal gås frem for å finne svar på problemstillingen. Design kan anses som en overordnet struktur som virker styrende for det videre arbeidet (Brekke 2006).

Dokumentanalysen omtales i kapittel 5 og dreier seg om å bestemme rollen til matematiske bevis i gymnas og videregående skole ved ulike tidsperioder i Norge. For å finne ut mer om beviset i norsk skolematematikk var det hensiktsmessig å studere læreplaner med mål og krav elever har møtt til ulike tider, samt lærebøker og eksamensoppgaver. I den forbindelse ble Nasjonalbiblioteket i stor grad benyttet. Av nyere læreplaner (R94 og K06) var det naturlig å bruke Internett, også på grunn av tidsbesparelse. K06 er også kun å finne på Internett, bortsett fra den midlertidige utgaven. I den grad det var mulig var det ønskelig å få mer innsikt i hvorfor læreplanene ble som de ble. Noe av debatten rundt matematikkfaget og bevisets posisjon i læreplanene blir omtalt i 5.1.1 og 5.3.1, og baserer seg hovedsakelig på doktoravhandlingen til Ove Skarpenes fra 2004. I forbindelse med utformingen av R94 og K06 ble det foretatt intervjuer med sentrale personer i læreplangruppene. Tom Lindstrøm, professor i matematikk ved UiO, kom med i læreplangruppa i 1993 etter at den første planen som ble sendt til høring fikk mye kritikk. Han var med i det siste arbeidet av planen med grunnkurset etter R94 og var i tillegg regulært medlem i gruppa som så på de videregående kursene, 2MX og 3MX. Seksjon 5.4.5 om utformingen og diskusjonene rundt utviklingen av R94 baserer seg i sin helhet på et intervju med Lindstrøm (06.03.09). Kristian Ranestad, også professor i matematikk ved UiO, var leder i læreplangruppa som skulle lage forslag til læreplaner for programfagene i matematikk (R1, R2, S1, S2 og X) i Kunnskapsløftet. Seksjon 5.5.4 bygger på informasjon fra et intervju med Ranestad (17.03.09). Studien av de to seneste læreplanene for videregående skole gir derfor et noe mer detaljert bilde og sier også noe om *ideenes* læreplan.

En god del av drøftingen i oppgaven baserer seg på relativt ny forskning og publikasjoner som tar opp argumenter for og imot bevis i skolen. Bevis i undervisningen er et aktuelt tema, ikke bare i Norge. Den 10-15. mai i år (2009) ble det avholdt en internasjonal matematikkonferanse i Taipei, Taiwan, hvor temaet var: *ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education.* Tall (2009) var blant artiklene som ble diskutert under konferansen. Denne artikkelen er i likhet med de fleste andre fagdidaktiske artiklene hentet fra Internett. I tillegg til forskeres oppfatninger av bevis undersøkes også læreres syn på bevis i undervisningen gjennom intervjuer av fem utvalgte lærere i videregående skole.

Formålet med intervjuet av lærerne er å finne ut mer om synet noen av dagens lærere i videregående skole har på bevis og bevisføring, og å klargjøre bevisets rolle i undervisningen (*implementert læreplan*) ved utvalgte skoler. I tillegg tas det med noe av diskusjonen rundt utformingen av læreplanene R94 og K06 for å få finne argumentasjon som har vært benyttet i drøftingen av bevisets rolle i videregående skole. Det er også interessant å få et innblikk i den innledende fasen ved læreplanutarbeidelsen som representerer *ideenes læreplan* (Engelsen 2006). Oppgaven har valgt en kvalitativ innfallsvinkel for å studere dette nærmere, mer spesifikt ved semi-strukturerte intervjuer.

Semi-strukturerte intervjuer gir mulighet for å få frem nyansert informasjon om både forberedte temaer og annet som kommer frem under intervjuet. Til tross for at metoden er fleksibel har den også en grad av struktur som gjør at den berører de mest aktuelle sidene ved problemstillingen, det være seg læreres oppfatninger om undervisning av matematiske bevis i skolen og hvor gjeldende beviset gjør seg i skolen i form av den *oppfattede* og *implementerte* læreplan. For å belyse lærernes oppfatninger inneholder intervjuguiden i oppgaven (se vedlegg 9) ti spørsmål som tar for seg ulike aspekter ved bevis i skolesammenheng (intervju 1, foretatt i perioden 02.02.09 - 02.04.09). Dette er interessant med tanke på å avdekke mulige felles og ulike erfaringer. Utvalget kan kalles *homogent* i og med at alle informantene ved dette intervjuet er erfarne matematikklærere i videregående skole. Med tanke på problemstillingen ble lærerne valgt etter kriteriet at de var erfarne, med undervisningsbakgrunn fra flere læreplaner. Matematikklærerne hadde noe ulik bakgrunn. Lærer 4 hadde hovedfag i geografi mens lærer 5 hadde fysikk som hovedfag. Uten at det var noe stort fokus i oppgaven kunne det være interessant å se om dette hadde noen innvirkning på deres svar i intervjuet. Skolene hvor lærerne arbeidet ble valgt ut på grunnlag av geografisk beliggenhet, fortrinnsvis i, eller i, nærheten av Oslo. Dette med hensyn på tiden jeg hadde til rådighet.

Ved intervjuet om utformingene av læreplanene R94 og K06 ble også et semi-strukturert intervju benyttet. Det var ønskelig å få en viss dybde i svarene for å få et mer detaljert bilde av hvordan læreplaner forhandles frem, samtidig som uforutsette temaer kunne behandles. Informantene ved dette intervjuet ble valgt ut på grunnlag av deres inngående kjennskap i debatten og deltakelsen i utviklingen av de to seneste læreplanene.

Intervjuet med lærerne ble foretatt ved skolene de arbeidet, og tatt opp med diktafon. Disse lærerne er anonymisert. Anonymisering kan gjøre det lettere å få frem meninger og holdninger enn om navnene blir offentliggjort. Intervjuet med medlemmene av læreplangruppene fra R94 og K06 fant sted ved informantenes kontorer og også her ble det tatt lydopptak med diktafon. I dette tilfellet var det nødvendig å nevne navn da opplysningene kom fra medlemmer av spesifiserte komiteer. Av forskningsetiske hensyn ble det forespurt om, og godkjent, at deres navn kunne brukes i oppgaven. Det ble også rapportert til Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). [Transkriberinger av alle intervjuene er tilgjengelige hos forfatteren.]

4.3 Gyldighetskrav

Når det gjelder hva som anses som gyldig informasjon er *validitet* et sentralt begrep. Validitet er knyttet til om det er overensstemmelse mellom det vi ønsker å måle og det vi faktisk måler. Datainnsamlinger og målinger skal være i tråd med forskerens intensjoner (Ragin 1994). Det finnes ulike typer validitet. *Begrepsvaliditet* er knyttet til resultaters troverdighet og handler om hvorvidt vi måler det vi tror vi måler. I forbindelse med kvalitative studier hvor det ikke kan måles eller kvantifiseres, dreier validitetsbegrepet seg om i hvilken grad forskerens funn på en korrekt måte gjenspeiler hensikten med studien og representerer virkeligheten (Johannesen mfl. 2007). I denne oppgaven uttrykkes dete først og fremst i form av informantenes svar ved intervjuene. Alle informantene hadde solid kunnskap i temaet de fikk spørsmål fra, noe som gir god validitet. For å styrke validiteten i oppgaven har svarene i intervjuene om utformingen av R94 og K06 blitt tilbakeført til informantene for å få dem bekreftet. *Ekstern validitet* er en annen form for validitet og omhandler resultaters overførbarhet til liknende fenomener, med andre ord i hvilken grad vi kan generalisere resultatene. Utvalget i denne oppgaven er altfor lite til å kunne generalisere, det være seg læreres og læreplanutvikleres syn på bevis i skolen.

Reliabilitet sier noe om en undersøkelses pålitelighet. Reliabiliteten gir uttrykk for i hvilken grad en studie kan etterprøves (Dalen 2008). I forbindelse med denne oppgaven skal informasjon om informanter og metode, i tillegg til bruk av identiske spørsmål til lærerne i intervjuene, styrke reliabiliteten.

Spørsmålene til intervjuene ble utprøvd på forhånd for å sikre at de besvarte problemstillingen på en tilfredsstillende måte. Det var også ønskelig å fjerne uklarheter, ledende og irrelevante spørsmål, og samtidig få innspill til flere spørsmål som kunne stilles. Etter et prøveintervju (intervjuet av lærerne, intervju 1) ble det klart at det kunne være lønnsomt å klargjøre hva lærere i videregående skoler legger i bevisbegrepet. Dette ble derfor innledningsspørsmålet og skulle tydeliggjøre hva lærerne svarte på lenger ut i intervjuet. Andre forbedringer var knyttet til en klargjøring av spørsmålet om hvordan elever vurderes i føring av bevis og presiseringer rundt bevisbegrepet. Det være seg et metaperspektiv på bevis som eget tema versus bevisførsel som berører flere felt i matematikken. Noen spørsmål var for omfattende og ble delt opp i flere. Bruken av ordet «når» kunne ved et tilfelle også misforstås da dette kan tolkes både fra et tidsperspektiv og i betydningen av i hvilke sammenhenger noe skjer.

5. Bevis i læreplaner for gymnas og videregående skoler

For å belyse den første delen av problemstillingen som utgjør hovedfokuset i oppgaven ble det innhentet dokumenter som klargjør hvilken plass bevis har hatt i læreplaner for gymnas og den videregående skole. Denne dokumentanalysen behandler den *formelle* delen av læreplanen ved å studere fem læreplaner, og den *oppfattede* læreplan i form av lærebøker og eksamensoppgaver. Den første læreplanen som omtales i denne oppgaven kom i 1896. Senere fulgte læreplaner fra 1935, 1976, 1994 og 2006.

For å få frem eventuelle ulike tolkninger av læreplanene og deres vektlegging av bevis, har flere læreverk med ulike forfattere blitt studert.

I analysen av eksamensoppgaver omtales ved noen anledninger oppgaveformuleringen «vis at». Disse oppgavene kan ha mange likheter med bevisoppgaver, men flere av dem som er med i eksamenssettene kunne like gjerne vært formulert med «regn ut» eller «finn». Noen «vis at»-oppgaver tas derfor med i analysen, mens mange utelates da de anses like mye som tradisjonelle regneoppgaver. Disse oppgavene nevnes for å tydeliggjøre at argumentasjon og deduktivt arbeid ikke bare er relatert til bevis i matematikken, og fordi «vis at»-oppgaver i mange tilfeller åpner for føring av bevis.

5.1 Lov om høiere almenskoler av 27. juli 1896

Lov om høiere almenskoler etterfulgte skoleloven av 1869 og medførte betydelige endringer. Latin var ikke lenger obligatorisk, og skolen skulle preges mer av nyhumanistiske tanker[20] (Andresen 2007). Dette innebar økt satsning på fordypning i fag fremfor breddekunnskap. Statsmannen og filologen Georg Sverdrup argumenterte for en slik skole med «non multa, sed multum» – *ikke mangt, men meget.* Sverdrup døde i 1850 og hadde ingen direkte påvirkning på utviklingen av loven av 1896, men ideene hans levde videre.

[20] Nyhumanismen var en periode i kulturhistorien rundt århundreskiftet 1700-1800 og ble karakterisert ved gjenoppdagelse av antikkens ideer. Nyhumanismen lå bak bak utformingen av det klassiske dannelsesideal. Studiet av klassiske språk og klassisk litteratur ble ansett som grunnleggende for personlighetsdannelsen (Store norske leksikon 2009).

5.1.1 Debatten rundt matematikkfaget på 1800-tallet

Nyhumanistene var ikke særlig begeistret over å ha naturfag i skolen. Språk som gresk og latin var de viktigste fagene, men det var en rådende oppfatning at matematikk var dannelsesskapende og faget fikk dermed sin plass i skolen. Dette gjaldt den mer formelle matematikken med bevis, logikk og abstrakt tenkning. Anvendt matematikk som kunne knyttes til naturvitenskapen var ikke ønskelig. Politikeren Anton Martin Schweigaard kritiserte undervisningen i latin og gresk, understrekte behovet for nytteorienterte fag og var den som satte fart i skolematematikken i Norge (Skarpenes 2004).

I 1839 ble det nedsatt en komité bestående av Fredrik Moltke Bugge, Anton Martin Schweigaard og Herman Foss med det formål å revidere landets undervisningsvesen. I likhet med Schweigaard stilte Foss seg kritisk til gamle dannelsesfag og ønsket en moderne skole med matematikk som et sentralt fag, som også Bugge innså verdien av. Matematikkfaget som ble lansert fikk et innhold med mye anvendelser, blant annet plangeometri, trigonometri, logaritmeregning, praktisk regning, aritmetikk og andregradslikninger. Læreplaner gjenspeiler ofte samfunnet og dets behov. Det ble sagt at undervisningen skulle være orientert mot problemer i samtiden og mot næringslivet. En av pionerene i norsk skole, Hartvig Nissen, gav realfagene etter hvert en anselig plass i norsk skole (Skarpenes 2004).

Ved utformingen av skolers undervisningsinnhold i matematikk har det oppstått diskusjoner rundt hvilken grad matematikken skal være ren og teoretisk eller praktisk orientert, ofte kalt striden mellom nyhumanister og realister. Sentrale personer i debatten tidlig på 1800-tallet var professorene Niels Treschow og Søren Rasmussen fra universitetet i Kristiania. Treschow var opptatt av det filosofiske aspektet ved matematikken og ønsket en ren matematikk i skolen med fokus på geometri, aritmetikk og logikk. Rasmussen trakk frem betydningen av matematikk for oppøvelse av dømmekraften, og for å «skape orden og disiplin i tanken» (Skarpenes 2004: 98). Niels Henrik Abels lærer fra gymnaset, Bernt M. Holmboe, støttet Treschow i synet på matematikkundervisningen som teoretisk rettet. Holmboe skrev også en lærebok i geometri med hovedvekt på Euklids aksiomer. Christopher Hansteen, professor i anvendt matematikk, var bekymret over studentenes svake kunnskaper i praktisk matematikk og trodde Holmboes teoretiske lærebøker hadde skyld i dette. Han tok dermed til motmæle ved å skrive sin egen lærebok *Lærebog i Plangeometri* i 1835. Holmboe anbefalte ikke dette læreverket for elever ved norske latinskoler og debatten fortsatte med Hansteens utsagn: "Ingen skjøtter om Beviis for at Solen er oppe, naar den skinner ham i

Øinene." (Stubhaug, del 4, 2004) Dette er et eksempel på at det ikke bare er lærere og elever som kan ha ulike oppfatninger av bevis og deres gyldighet, også to store matematikere som Hansteen og Holmboe hadde ulike krav for hva som skulle til for å kunne overbevises.

En av Norges største matematikere gjennom tidene, Sophus Lie, sluttet seg til Treschow og Holmboe og mente at matematiske bevis var essensielle i undervisningen. Hansteen fikk støtte av Nissen og til tross for motstand ble det gjort endringer i matematikken i 1869, og praktisk matematikk fikk en betydelig rolle i faget. 27 år senere mistet denne grenen av matematikken noe av sin status.

Debatten rundt matematikkundervisningen fortsatte i det nye århundret og den store skolematematikeren var Magnus Alfsen som i 1904 gav ut artikkelen *Formal eller real matematikkundervisning*. Alfsen var sentral i arbeidet med å forbedre matematikkundervisningen og bidro også i lærerutdanningen ved undervisning ved Pedagogisk Seminar i Oslo (Solvang 1986, bind 1). Han skrev også en rekke lærebøker, se 5.1.3 og 5.2.2.

5.1.2 Læreplanens omtale av matematikk og bevis i 1896

KUD[21] (1899) innleder omtalen av matematikkfaget med målene for undervisningen.

> De i middelskolen[22] ikke behandlede dele af den elementære aritmetik og algebra samt af geometrien. Kjendskab til de trigonometriske grundbegreber og deres anvendelse ved plane trianglers beregning. Elementerne af stereometrien [romgeometri]. Øvelse i konstruktion og beregning. For reallinjen desuden analytisk geometri i den udstrækning, hvori den naturlig kan behandles uden kjendskab til høiere matematik. Nogen kjendskab til den hele funktions egenskaber (KUD 1899: 31).

Undervisningsmetodene skulle være omtrent de samme som i middelskolen, men tilpasset elevenes utvikling og modenhet. Det ble lagt vekt på å utvikle elevenes evne til å finne frem i teori og arbeide selvstendig. Samtidig skulle læreren gjennomgå det som elevene ikke kunne tilegne seg uten for mye strev. Hovedområdene i gymnasmatematikken var *Aritmetik og algebra, Plangeometri, Trigonometri* og *Stereometri.* Særskilt for reallinjen var *Analytisk*

[21]Kirke- og undervisningsdepartementet/Kyrkje- og undervisningsdepartementet

[22] Seksårig skole som fra 1848 var obligatorisk for opptak til 3-årig gymnas.

geometri og *Funktionslæren.* Ingen av disse områdene omtaler bevis eller resonnement. I gymnasets første år ble omtrent tre fjerdedeler av tiden brukt til gjennomgåelse av aritmetikk og algebra. Mer spesifikt var dette bruk av de fire regneartene, brøk og negative tall. Videre dreide det seg om undervisning i potenser, rotstørrelser, irrasjonale tall, logaritmer samt likninger av første og andre grad. Lærestoffet skulle tilegnes ved regning av oppgaver. Den resterende fjerdedelen ble viet pensum i plangeometri som innbefattet teori om polygoner, sirkelberegning samt beregnings- og konstruksjonsoppgaver. Ved det andre året ble det i fellestimene (to timer) for de ulike linjene undervist i trigonometri. Dette omfattet trigonometriske funksjoner, løsning av rettvinklede trekanter, sinus, cosinus og tangens til en sum og differanse av to vinkler, til det dobbelte og det halve av en vinkel, avhengighet mellom sider og vinkler i en trekant. Realgymnaset hadde også om trigonometriske likninger. Reallinja begynte dette året med analytisk geometri i de fire resterende timene med matematikk og her ble fokuset rettet mot den rette linje, sirkelen, ellipsen, hyperbelen og parabelen i både et kartesisk og polarkoordinatsystem, diskusjon om den alminnelige andregradsliknings geometriske betydning. Ved det avsluttende, tredje året var det også to fellestimer for linjene. Det eneste nye her var stereometri som tok for seg polyedre, sylinderen, kjegla, kula. Det står ikke eksplisitt at bevis er en del av målene som skal nås i denne læreplanen.

5.1.3 Lærebøker utviklet for Lov om høiere almenskoler av 1896

Lærebøkene som her studeres tok for seg ett tema hver, i motsetning til nyere læreverk der temaene deles inn i kapitler i én og samme bok. Omtalen er derfor noe kortere.

***Elementær stereometri* (Alfsen 1898)**

Boka innleder med generell informasjon om plan og rette linjer. Videre følger 112 punkter med læresetninger og begrepsforklaringer. Bevis er et gjennomgående tema, både i begrunnelsen for setningene og i oppgavene. Blant annet skal det bevises at

> Et plan gjennem en af to parallele linjer er parallelt med den anden (Alfsen 1898: 17).

Det er forholdvis få eksempler i boka som gir forslag til hvordan oppgaver i de ulike temaene skal løses. Derimot er setningene grundig forklart, ofte med figurer. Bevisene presenteres ofte visuelt med noe utfyllende algebra. Sett i forhold til læreplanens beskjedne omtale av bevis er det vesentlig mer omtalt i denne boka. Bevis ser ut til å være en naturlig del av arbeidet med matematikkfaget i dette læreverket.

***Plangeometri* (Alfsen 1901)**

Læreboka i plangeometri har stort sett samme oppbygning og struktur som boka i stereometri, men i boka om plangeometri har forfatteren valgt å dele lærestoffet inn i tre deler. Den første delen «kongruens og lige storhed» består av 22 definisjoner og setninger om kongruens og symmetrier om et punkt og en akse. Det presenteres enkelte bevis for disse læresetningene, blant annet den pytagoreiske læresetning. Andre del av boka presenterer definisjoner og setninger innen «forhold og ligedannethed» og inneholder flere bevis innenfor temaet. Her finnes også oppgaver, selv om de fleste befinner seg i den tredje delen «tillæg». Flere av disse er rene bevisoppgaver. For eksempel finner vi:

> Bevis følgende sætning: Hvis stykerne AB og BC paa én ret linje er proportionale med stykkerne ab og bc paa en dermed parallel ret linje, saa gaar Aa, Bb og Cc gjennem samme punkt (Alfsen 1901: 23).

«Tillægget» består sammen med oppgaver av et avsnitt om matematikkens historie med særlig vekt på eldre hellenistisk matematikk, men til dels også infinitesimalregningen ved Newton og Leibniz.

***Lærebog i plangeometri for gymnasiet* (Bonnevie & Sørensen 1902)**

Dette læreverket er svært likt *Plangeometri* (Alfsen 1901), men har ikke den samme tredelingen. Allerede på den første siden er det øvelsesoppgaver i bevis knyttet til polygoner og om de er kongruente. Videre presenteres flere teoremer, blant annet Pytagoras´ læresetning som bevises i likhet med de andre teoremene i boka. Polygoner er et sentralt tema i boka og mange bevisoppgaver dreier seg om dette. For eksempel:

> Bevis, at siderne af den regulære sexkant, femkant og tikant, indskrevne i samme cirkel – danner siderne i et retvinklet triangel, eller at $S_5^2 = S_6^2 + S_{10}^2$ (Bonnevie & Sørensen 1902: 24)

Bevisene skal ifølge boka være en «fuldstændiggjørelse» av pensum fra middelskolen. Det er tydelig at det var ønskelig å begrunne matematiske resultater og utvikle forståelse.

***Analytisk plangeometri* (Alfsen 1903)**

Dette var en bok som reallinja benyttet seg av. Språklinjene hadde ikke analytisk geometri i sin undervisning. Her plasseres ikke majoriteten av oppgaver i en siste del, men kommer fortløpende etter hvert som setningene presenteres. Beviset har mer eller mindre den samme rollen som i de andre bøkene. Flere bevis er knyttet sirkler som «Opgave 79»:

> Bevis, at berøringskorderne for tre cirkler gaar gjennem ét punkt. (Alfsen 1903: 51)

For øvrig er boka temmelig lik de ovennevnte. Forfatteren sier det også selv i forordet:

> Jeg finder det ikke nødvendigt at ledsage den bog, jeg herved fremlægger for vore skoler, med mange ord (Alfsen 1903).

Generelt sett spiller beviset en betydelig rolle i de utvalgte læreverkene. Spesielt interessant er det å se at lærebøkene gir mange oppgaver knyttet til utledninger og bevis.

5.1.4 Analyse av eksamensoppgaver utviklet for Lov om høiere almenskoler av 1896

Det er tydelig at bevis i denne perioden var et satsningsområde. Bevis var en vanlig oppgaveformulering fra 1896-1935. I eksamen fra 1896 er det to oppgaver som uttrykker at det skal bevises. For eksempel skal det bevises at avstanden fra et vilkårlig punkt på en hyperbel til to asymptoter har et konstant produkt. I 1898 kom det geometriske bevis, mens i 1903 lød en oppgave:

> Hvorledes forandrer potensen a^n sin verdi, når eksponenten n vokser i det uendelige? Bevis (Haffner & Haagaas 1925: 25).

Å nevne alle bevisene som forekom i eksamensoppgaver fra 1896-1935 er det ikke rom for her, men det kan sies at bevismengden ble opprettholdt under denne læreplanen. I 1922 møtte elevene bevis i logaritmer og i 1925 skulle de utlede formelen for cotangens til en differens av to vinkler uttrykt ved cotangens til hver av de to vinkler. Bevis forekom i ulike deler av matematikken og var ikke knyttet til et tema alene.

Bevis i en eller annen form, ofte uttrykt som «bevis», forekom i de fleste eksamensoppgavene gjennom disse 40 årene og var tydeligvis en sentral del av elevenes opplæring. Dette til tross for at det ikke var særlig omtalt i loven fra 1896.

5.2 Lov om høiere almenskoler av 10. mai 1935

I 1920 ba Stortinget regjeringen om å nedsette en kommisjon som skulle se nærmere på skolevesenet i Norge. Sosial og politisk utvikling i årene etter århundreskiftet medførte krav om en mer demokratisk skoleordning (Solvang 1986, bind 1). Med høiere almenskoler menes det i loven om høiere almenskoler av 1935 gymnaser, realskoler og høiere pikeskoler. Oppgaven fokuserer på gymnasene. Gymnaset bygget på avsluttet folkeskole og skulle forberede elevene til universitetet[23] og andre høyskoler, jfr. Lov om høiere almenskoler av 10. mai 1935 kapittel 1, § 3. Videre skulle de høiere almenskoler «medvirke til elevenes kristelige og sedelige opdragelse og søke å utvikle dem så vel i åndelig som i legemlig henseende til dyktige unge mennesker». Gymnasets varighet var i utgangspunktet fem år. Gymnaset hadde linjene reallinje, naturfaglinje, engelsklinje, latinlinje og norrøn linje. Et viktig moment som må tas med når det skal sees nærmere på hvilke krav elevene har møtt til ulike tider når det gjelder undervisning og eksamen finner vi i Lov om høiere skoler fra 1927:

> Når det gjelder gymnasiet, må man alltid være opmerksom på at gymnasiet ikke er og ikke skal være en skole for ethvert ungt menneske. Der kreves ikke alene en viss sum av kunnskaper, men også modenhet, anlegg og interesse for boklig arbeide for å kunne følge med i gymnasiet; ellers går man der til liten nytte for sig selv og til skade for sine medelever.
> (DPS[24] 1927: 9)

Et slikt krav til elevene finner vi ikke igjen i samme grad i dagens skole. Riktignok stilles det krav til karakterer for å komme inn ved skoler med høye søkertall, men i dag er skolen for alle, og ikke en «elite» med særskilte eller visse evner. «Ulike mennesker, like muligheter» sies det blant mange av dagens politikere. Dette er en indikasjon på at kravene som ble stilt for godt og vel 70 år siden var betydelig større og som må tas med i beregningen når det skal vurderes for hvem beviset skulle, og skal, undervises.

[23]Universitetet i Kristiania var Norges eneste frem til 1946.

[24] Den Parlamentariske Skolekommisjon

5.2.1 Læreplanens omtale av matematikk og bevis i 1935

Skolekommisjonen kommer tidlig inn på deduktiv og abstrakt tenkning i sitt lovutkast (DPS 1927). Under omtalen av *Regning og matematikk* i gymnaset innledes det med at elevene befinner seg på meget forskjellige utviklingstrinn i løpet av gymnasets fem år. Allerede i andre setning beskrives overgangen fra folkeskolens til gymnasets matematikk.

> Og når elevene fra folkeskolen går over til gymnasiet og skal begynne på faget matematikk, møter de i den deduktive tankeform og den generelle og abstrakte karakter som er eiendommelig for dette fag, noget som er helt nytt for dem.
> (DPS 1927: 40)

Videre påpekes det at førsteårsstudentene ikke burde møte for sterke krav hva stringent, formell aritmetisk-algebraisk bevisførsel angår, men at det heller bør satses på geometriske bevis innledningsvis. Argumentasjonen bygger på at det da er lettere for de yngste elevene å innse nødvendigheten av bevisførsel og at det formelle bevis blir lettere å forstå. Det anbefales at først ved det tredje året på gymnaset, klasse III hvor det deles inn i linjer, bør matematikkundervisningen ta en mer avansert retning.

DPS (1927), kapittel 2, § 9 (*Om undervisningen*) omtaler omfang og mål for undervisningen i de forskjellige fag ved gymnaset. I punkt nummer 11 befinner *regning og matematikk* seg, hvor målene for undervisningen listes opp. Bevis var ikke nevnt blant disse.

I den foreløpige leseplanen KUD (1939) er det derimot nevnt at summeformelen for kvadrattallene skal bevises. Innenfor geometrien var det ønskelig å fortsatt ha bevis. Flere formler innenfor geometrien skulle utledes, blant disse Herons formel[25]. Gymnasrådet gav senere ut leseplaner hvor kravet til beviset om summeformelen hadde forsvunnet (Solvang 1986, bind 1). Ellers var det en relativt beskjeden behandling av bevis i denne læreplanen.

På denne tiden (1930-årene) kom nye pedagogiske teorier inn i norsk skole. John Deweys aktivitetspedagogikk stod i kontrast til en undervisning med presentasjon av ferdige resultater, og fremmet læring ved eksperimenter og aktivt arbeid (Skarpenes 2004). Den induktive metode gjorde seg mer gjeldende. Erfaring var et stikkord. Dewey blir ofte knyttet til teorien «learning by doing».

---

[25] $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ der A er arealet av en trekant med sider a, b og c. $s=\frac{a+b+c}{2}$

Lov om høiere almenskoler ble revidert i 1964, men dette innebar ikke nevneverdige endringer i undervisningsplanene (Skarpenes 2004). Noen endringer var at navnet «høiere skoler» ble erstattet av realskoler og gymnas og den økonomiske linjen ble inkludert i gymnaset.

5.2.2 Lærebøker utviklet for Lov om høiere almenskoler av 1935

Også her inneholdt læreverkene som her blir studert, enkelttemaer. Bøkene inneholdt derfor relativt få sider sammenliknet med bøkene som blir behandlet senere i oppgaven.

***Trigonometri for gymnasiet* (Alfsen 1937)**

Boka består av to deler, hvorav den første delen er pensum for «gymnasiets sproglinjer». Denne delen omhandler den rettvinklede trekant, sinus, cosinus og tangens. Her er det ikke noe å hente når det gjelder bevis. Del II tar for seg generaliserte trigonometriske funksjoner med utvidelse av vinkelbegrepet. Her kommer bevis inn igjen, også i oppgaver, men ikke i samme grad som forfatterens bøker fra 1898, 1901 og 1903. Selv om denne boka behandler noe annet stoff enn de andre bøkene berører de også en del av det samme. En bevisoppgave som gis er:

> Opgave 239. Bevis at når A+B+C = 180°, så er

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$ (Alfsen 1937: 91).

Ellers er det lite å finne om bevis, også i del II.

***Analytisk plangeometri* (Alfsen 1938)**

Sett i lys av Alfsen (1903) kan det sies at bevis her fremtrer i noe mindre grad. Læresetninger presenteres i større grad uten bevis og det er langt mellom bevisoppgavene. I oppgave 58 må det kunne sies, til tross for formuleringen «vis at», at det skal gjennomføres et bevis. «Vis at» åpner for flere grader av overbevisning.

> **Opgave 58.** Vis analytisk at perpendikulærene på midten av en trekants sider skjærer hverandre i ett punkt (Alfsen 1938: 35).

Denne oppgaven kunne like gjerne vært formulert med «bevis at» da det uansett krever en fremgangsmåte som likner matematisk bevisføring.

***Romgeometri* (Alfsen & Alfsen 1940)**

Innledningsvis, i forordet, står det at boka bygger på Elementær stereometri av Magnus Alfsen, men at den er helt omarbeidet etter de prinsipper som ligger til grunn for de nye «leseplaner». Stereometrien ble nå kalt romgeometri. Her finnes også flere interessante opplysninger.

> Vi nevner f. eks. at vi ikke beviser setningen om summen av sidevinklene i et polyedrisk hjørne på den vanlige tradisjonelle måten, men isteden fører et nytt bevis som bygger på romgeometrisk syn (Alfsen & Alfsen 1940).

Litt nedenfor finner vi:

> Av spesielle endringer som er foretatt, nevner vi at formlene for volumet av en pyramide og av volumet av kuledeler (segment osv.) nå er utledet ved summasjon. Dette er i tråd med at den nye leseplan har gjort infinitesimalregning obligatorisk i realgymnaset. Tankegangen i disse bevisene går naturlig inn i arbeidet med tilegnelsen av begrepet bestemt integral (Ibid.).

I tillegg til disse bevisene finnes også en god del andre innen romgeometrien. Det finnes også en rekke bevisoppgaver. Oppgave 26 (Alfsen & Alfsen 1940: 19) etterspør fire bevis som skal gjennomføres ved parallellforskyvning. Bevisene som er utelatt i dette verket har blitt erstattet av alternative bevis som var mer «tidsriktige».

***Matematikk - For gymnasets reallinje I* (Alexander & Skjulstad 1951)**

Dette læreverket har samlet både algebra og geometri i én og samme bok. I forordet sies det at flere geometriske setninger er gitt som oppgaver i bevisføring. Dette var setninger elevene burde kjenne, men som ikke nødvendigvis behøvde å inngå i et eksamenspensum. Induksjonsbeviset nevnes også innledningsvis og dette dekker to sider av algebradelen i boka Fem oppgaver dreier seg om dette temaet. I geometrikapittelet finnes hele sider viet oppgaver med bevis, for eksempel «bevis at i enhver trekant er differensen mellom to sider mindre enn den tredje side» (Alexander & Skjulstad 1951: 79). Algebradelen av boka bærer ikke det samme preg av bevis, men også her finnes utledninger både ved innføring til nytt stoff og oppgaver. Selve bokas struktur er veldig lik verkene fra Alfsen og bevis er meget sentralt, innenfor geometrien i særdeleshet.

Matematikk - For gymnasets reallinje II **(Alexander & Skjulstad 1950)**
Også her befinner algebraen og geometrien seg i samme bok. Forordet bemerker at utledningene for volumet av pyramider, kjegler og kuler nå skjer ved integrasjon siden infinitesimalregningen på dette tidspunktet var obligatorisk og at det kreves bevis ved denne metoden. Videre nevnes utledningen av deriverte og integraler av de trigonometriske funksjonene. Nye regneregler begrunnes i de fleste tilfeller ved bevis. Oppgavene i boka inneholder mange «bevis» og «utled»-oppgaver. Fokuset på geometriske bevis er videreført hvor en rekke setninger blir utledet, deriblant sinus- og cosinussetningen[26]. Oppgavene bærer også preg av bevis. Elevene skal blant annet utlede Herons formel ved hjelp av to formler. (Aleksander & Skjulstad 1950: 62). Læreplanen la på denne tiden vekt på geometriske bevis og dette kommer også til uttrykk i denne læreboka. Algebraen har i likhet med *Matematikk – for gymnasets reallinje I* (Alexander & Skjulstad 1951) noe bevis, men ikke i samme grad som i geometrien.

Ved å studere de utvalgte lærebøkene fra 1935 og utover er det tydelig at bevis har hatt en betydelig plass. Sammenliknet med lærebøkene fra Loven av 1896 er det ingen vesentlige forskjeller på dette området.

5.2.3 Analyse av eksamensoppgaver utviklet for Lov om høiere almenskoler av 1935

I eksamensoppgavene fra 1935 og utover finner vi også en rekke bevisoppgaver, men ikke like mange som i perioden 1896-1934. Noen oppgaver presiserer at det ikke skal føres bevis for formler elevene skal benytte, men i de samme eksamenssettene finnes også oppgaver hvor det skal bevises og utledes. I 1936 skulle elevene skrive opp formelen for summen av de første ledd av en geometrisk rekke uten bevis. Ved denne eksamenen fantes også oppgaver som:

> Bevis at $\cos 3\mathrm{v} = 4\cos^3 v - 3\cos v$ (Sogn 1963: 61)

og

> Utled formelen for en rettavkortet rett kjegles volum (Sogn 1963: 62).

---

[26] Sinussetningen: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\mathrm{bc}\cos A$. (*a*,*b* og *c* er sider i trekanten. *A*, *B* og *C* er vinklene.)

Utledninger var vanlige eksamensoppgaver frem til 1950. Etter 1950 gikk det lengre mellom hver gang de forekom. Det samme kan sies om bevisoppgavene. Oppgaveformuleringene lød ofte «finn» og «regn ut» og bar mindre preg av matematisk argumentasjon. Bevis var ofte knyttet til trigonometriske likninger, men også til geometrien som var et tema denne læreplanen mente passet ypperlig til bevisføring. Fra eksamen i 1943 finner vi:

> En trekant med hjørner $(a,0)$, $(-a,0)$ og (b,c) er gitt. Bevis at medianene går gjennom samme punkt *S*. Finn også det forhold *S* deler en median i.

Elevene ble bedt om utledninger ved realartium lenge etter 1950, for eksempel fra eksamen i 1961 (utsatt og ny prøve) der det står:

> Utled regnereglene for logaritmen til et produkt og logaritmen til en potens (Sogn 1963: 136),

men slike utledninger var bemerkelsesverdig sjeldnere å finne etter 1950 enn i perioden 1935-1950. På grunnlag av eksamensoppgavene kan det sies at beviset totalt sett virket å ha en noe mindre rolle i Lov om høiere almenskoler av 1935 enn hos forgjengeren fra 1896. Bevis virket også her å ha en betydelig rolle i læreplanen fra 1935, men ut ifra innholdet av bevis i eksamensoppgavene kan det tyde på at bevis ble en noe mindre del av undervisningen rundt midten av 1900-tallet.

5.3 Læreplanen for den videregående skole 1976

Den videregående skole ble opprettet i 1974 og iverksatt i 1976. Varigheten var nå på tre år. Gymnas, handelsskoler, yrkesskoler, husstellsskoler og husflidsskoler gikk nå under denne betegnelsen. Det er i denne læreplanen (1976) bevistyper blir satt opp som faglige mål i den videregående skolen for første gang (Solvang 1986, bind 1). Her blir det også i større grad spesifisert hva elevene skal lære til enhver tid, det vil si hva som utgjør pensum i de ulike årstrinnene. Læreplanen består av ulike deler hvor del 2 og del 3a er de mest relevante i forbindelse med denne oppgaven. Del 2 gjelder de felles allmenne fag mens del 3a omfatter studieretning for allmenne fag. Generell informasjon, mål, emneplanen til 1MA, arbeidsmåter og vurderingen er felles punkter for begge delene. På side 113 i del 2 finner vi matematikkfaget med generell informasjon der det står at matematikken med fordel til å begynne med kan basere seg på repetisjon fra grunnskolen. Deretter omtales matematikkursene for de tre årene.

5.3.1 Debatten rundt utformingen av læreplanen i matematikk for den videregående skole 1976

Mengdelære og logikk var en del av den *moderne matematikken* som vokste frem på 60-tallet. Starten på denne matematikken ble til ved et studentprosjekt ved University of Illinois. Dette prosjektet ble utgangspunktet for en rekke reformprosjekter som spredte seg i USA og videre ut i verden. Den moderne matematikken var ikke bare en betegnelse på en type matematikk med annet innhold. Det var også navn på en internasjonal reformbevegelse som arbeidet for å forandre innhold og arbeidsmåter i skolens matematikkundervisning (Gjone 1985). I tillegg til mengdelære og logikk ble det til dels lagt stor vekt på bevisstrukturer (Johnsbråten i Mathema 2000). Forståelsen skulle oppnås gjennom logikk, struktur, bevis og ved bruk av mengder fremfor tall og klassisk geometri. Eksamensoppgavene for denne læreplanen blir beskrevet nærmere i 5.3.4, og uten å foregripe tingenes tilstand for mye kan det sies at det ble lagt inn oppgaver i 3MN som testet kunnskaper og forståelse i bevis. Noen av disse oppgavene gikk ut på å finne feil i resonnementene som ble presentert og korrigere dette. Denne oppgaveformen ble aldri særlig populær blant lærere og elever. Solvang (1986, bind 1) antyder at grunnen kunne være at det ikke ble lagt nok arbeid i logikken og bevistypene.

Også i denne perioden var det uenighet om matematikkundervisningen skulle være praktisk eller teoretisk rettet. Lektor Harald Solbakken ved Sandnes videregående skole var involvert i prosessene med matematikkfaget, og gav i et intervju (Skarpenes 2004) uttrykk for et ønske om mer struktur, bevis og logikk i motsetning til andre som ville gjøre matematikken anvendt. Sammen med lektor Ivar Bjørnsgård, som satt i fagutvalget som skulle revidere tidligere planer fra Gymnasutvalget, var han avgjørende for at læreplanen fikk et preg av moderne matematikk og faglig-teoretisk innhold. Den moderne matematikken møtte sterk kritikk og innføringen av den ble et kompromiss mellom dens tilhengere og motstandere. Mange mente at den moderne matematikken, med dens formalisme og teori ville gjøre det vanskelig å ha felles undervisning på grunn av differensieringsproblematikken. Resultatet ble at Lektorlagets og Gymnasutvalgets rådgivende uttalelser om logikk og mengder som et eget tema ble redusert til en oppfordring om at begreper fra logikken og mengdelæren måtte brukes i hensiktsmessige situasjoner.

5.3.2 Læreplanens omtale av matematikk og bevis i 1976

De ulike matematikkfagene i læreplanen for den videregående skole 1976

Hovedkurset 1MA og dets mål

Matematikken startet med 5-timerskurset 1MA og var obligatorisk for alle elever. Kurset var inndelt i et kjernestoff og et tilvalgsstoff. Tilvalgsstoffet inneholdt temaer elevene kunne spesialisere seg i ut i fra interesser og framtidsplaner. Dette gjaldt både yrkesfaglige elever og elever som skulle velge bestemte videregående kurs i matematikk. Elever på studieretning for allmenne fag som hadde mål om videre fordypning i matematikk ble oppfordret til å hente tilvalgsstoff innen flere felt i matematikken. Dette gjaldt f.eks *enkle likningar, ulikskapar og funksjonar med absoluttverdi, divisjon av polynom, litt om provføring og nødvendige hjelpemiddel fra logikk og mengdelære* (Læreplan for den videregående skole 1976, Del 2: 117). *Provføring* innebar *provtypar*, *kontrapositive prov* og *«ad absurdum»-prov*. Kjernestoffet i 1MA bestod av *aritmetikk og algebra* som første punkt og *funksjonslære* som det andre og siste. Det resterende pensum ble altså valgt ut ifra de forskjellige retningene elevene tok.

Ved det andre året hadde elevene tre muligheter: å velge bort matematikken, ta 2MN- eller matematikkurset for elever på den samfunnsfaglige linje, 2MS. For de som valgte bort matematikk etter ett år bemerker læreplanens punkt 3.3 *Kommentarar til emnelista for 1MA* at tilvalgsstoffet deres burde velges slik at kunnskapen gav maksimal nytteverdi. Dette er enda et tegn på hvor viktig anvendelsene i matematikken ble regnet som i denne læreplanen. 2MN hadde også fem timer i uka og var et obligatorisk kurs for elever for elever på naturfaglinja. Kunnskapen fra dette kurset var nært knyttet til fysikk, kjemi og biologi, men var i all hovedsak lagt opp for elever som skulle ta videre matematikk.

Generelle mål for matematikkfaget

I punkt 2 er de generelle målene beskrevet. Her heter det at elevene, gjennom arbeid med faget matematikk, skal få

- nødvendig kunnskap og dugleik både når det gjeld den utdanningsvegen som er vald, og dei behov som er vanlege i eit moderne samfunn

- god kjennskap til grunnleggjande emne og omgrep i faget
- forståing for matematiske problemstillingar og matematisk metode
- forståing for kva matematikken har å seie for utviklinga i vitskap og teknikk
- så gode føresetnader som mogeleg for sjølvstendig å kunne arbeide vidare med faget

(Læreplan for den videregående skole 1976, Del 2: 114)

Emneplan er neste punkt og her følger underpunktet 3.1 *Utval av fagstoff* hvor det begrunnes hvorfor de ulike emnene er tatt med, og hvorfor noen er utelatt eller nedprioritert. Det kommer tidlig frem at praktisk bruk av matematikken er viktig. Et mål som trekkes frem er å forberede elevene på «det vanlege samfunnslivet». Videre presiseres det særskilt at elevene skal utvikle forståelse for den stadig større rollen som anvendt matematikk har i dagens samfunn. Noen linjer nedenfor følger to viktige setninger:

> Den aksiomatisk-deduktive metoden kjenneteiknar store delar av matematikken. Men det er vanskeleg og neppe ønskjeleg å gje aksiomatikk nokon større plass i hovudkurset i den vidaregåande skolen. (Læreplan for den videregående skole, Del 2: 115)

Hovedkurset som omtales er 1MA som alle elevene hadde. Bevisets beskjedne fremtoning ved det første året kan sees i sammenheng med læreplanen fra 1935, der det ble nevnt at førsteårsstudentene ikke skulle møte strenge krav i bevisføring, men heller lære og overbevises gjennom visuell informasjon, da gjerne knyttet til geometri, på dette stadiet. Likesom sin forgjenger har denne læreplanen nedprioritert bevis ved elevenes aller første år i videregående skole.

Kompetansemål etter andre- og tredjeårsenhetene:
For å finne ut mer om de videregående matematikkfagene og deres innhold ble læreplanens Del 3a tatt i bruk. En nærmere titt på 2MS og 3MS avslører fort at beviset ikke er å oppspore som særskilte emner. Innenfor emnet *trigonometriske funksjonar med deriverte* i 3MS er det dessuten spesifisert at det er kun resultatene som kreves. Det må imidlertid ikke glemmes at læreplanens Del 2, punkt 3.2.1, avsnitt B2 anbefaler noe forkunnskaper både for 2MN og 2MS når det gjelder tilvalgsstoffet fra 1MA hvor det altså var temaer som provføring. Med

læreplanens formulering om at elevene skulle kunne *litt* om dette og at den samtidig bemerker at stoff innen logikk og mengdelære ikke ville bli prøvd ved eksamen kan tyde på at bevis ikke skulle vies stor plass i undervisningen i 2MN, 2MS og 3MS.

I 3MN er induksjonsbeviset listet opp blant emnene som skal undervises, under *funksjonslære og algebra*. Det var derimot i realiteten ute av undervisningen i den videregående skolen da det etterhvert ble bestemt at elevene ikke skulle testes i det ved eksamen (intervju Lindstrøm).

I motsetning til Lov om høiere almenskoler av 1935, nevner ikke læreplanen fra 1976 særskilt geometriske bevis. Der forgjengeren oppfordrer til en innføring i deduktivt resonnement ved visualiseringer for å fremme forståelse og innse nødvendigheten av bevis nevnes det her kun generelt om ulike bevistyper elevene bør ha sett før de velger matematikk videre. Klassisk geometri var endret vesentlig. Blant annet hadde projeksjonstegning blitt borte mens vektorregning og og funksjonslære hadde blitt viet større plass. For å finne ut mer om beviset i undervisningen kan en nærmere studie av noen lærebøker fra denne tiden være formålstjenlig.

5.3.3 Lærebøker utviklet for læreplanen for den videregående skole 1976

***Matematikk for den vidaregåande skolen 2MN* (Ommundsen & Solvang 1979)**
Det synes klart at forfatterne anser bevis og logikk som en sentral del av matematikkfaget da hele kapittel 4 «Litt om prov» dreier seg om dette. Forfatterne bemerker imidlertid at det er et orienteringskapittel. Kapittelet innledes med bruk av implikasjonspiler og logiske følger, etterfulgt av direkte bevis, ekvivalens, indirekte bevis, ad absurdum-bevis og bevis ved moteksempel. Avslutningsvis i kapittelet finnes et avsnitt som beskriver matematikkens oppbygging hvor aksiomatisk metode blir omtalt, og et sammendrag som oppsummerer alle de ovennevnte temaene. Det er i dette kapittelet hovedtyngden av bevis befinner seg, men utledninger av matematiske læresetninger finnes også andre steder i boka. Bevisoppgavene er hovedsakelig knyttet til kapittel 4. Læreplanens omtale av «litt om provføring» kommer tydelig frem i dette læreverket.

***Matematikk 2MN* (Alfsen 1981)**
I forordet presiseres det at forklaringene i boka er logisk holdbare uten å være sterkt

formalisert. Oppgavene knyttet til «det praktiske liv». Dette kan tolkes som at bevis ikke er et satsningsområde, men bevis er absolutt til stede, dog ikke i samme grad som i læreverket til Ommundsen og Solvang (1979). De finnes i form av utledninger av algebraiske formler, bevis for den deriverte, innen geometri og vektorregning. Oppgavene fokuserer på anvendt matematikk, men også her er det enkelte bevisoppgaver, primært innenfor vektorregningen:

> 4.10 Bevis likning (4)[27] i setning 2 ved å vise:
>
> 1. Dersom t og u har samme fortegn, er vektorene $(t+u)\vec{a}$ og $t\vec{a}+u\vec{a}$ parallelle og ensrettet, og begge har lengden $|t|\cdot|\vec{a}|+|u|\cdot|\vec{a}|$ (Alfsen 1981: 26)

I andre temaer er det færre oppgaver hvor påstander skal bevises.

Matematikk for den vidaregåande skolen 3MN **(Ommundsen & Solvang 1980)**

I likhet med forgjengeren utledes mange læresetninger, deriblant formelen for arealet til parallellogrammet ved bruk av determinanter. Her er derimot intet beviskapittel og bevis omtales ikke i samme grad som i læreverket for 2MN, selv om bevisteorien absolutt er til stede. Det er her induksjonsbeviset innføres og det gis sju oppgaver til dette temaet, deriblant

> Vis at vinkelsummen S_n i ein trekant er $S_n=(n-2)180^\circ$ (Ommundsen & Solvang 1980: 102).

I tillegg gis flere eksempler på bruk av induksjonsprinsippet. Induksjonsbeviset var altså pensum i 3MN, men hovedvekten av bevisteori synes å være plassert i 2MN. Boka er også tidvis opptatt av å gi eksempler på bruk av matematikk i praksis som læreplanen vektla så sterkt. I den forbindelse ble eksemplene gjerne hentet fra fysikken.

Matematikk 3MN **(Alfsen 1984)**

Etterfølgeren til Matematikk 2MN er bygd opp på samme måte og inneholder en del bevis. I Matematikk 3MN er dette ofte koblet til vektorregning, eksponential- og logaritmefunksjoner, men først og fremst i delkapittelet om induksjonsbevis. Ser vi bort fra dette temaet spiller ikke bevis noen sentral rolle i oppgaveregningen, heller ikke innenfor de førstnevnte temaene. Det er heller ikke særlig mange oppgaver knyttet til induksjonsbeviset, men boka gir en liten innføring.

---

[27] $(t+u)\vec{a}=t\vec{a}+u\vec{a}$

Sett i forhold til de to forhenværende læreplanene ser ikke beviset ut til å ha helt den samme posisjonen i læreplanen fra 1976, selv om bevisene her også helt klart er til stede, særlig hos Ommundsen og Solvang (1979). Begrunnelsen for at det kan sies at beviset har hatt en mindre rolle i 1976-planen er at det er færre geometriske bevis både i eksempler og oppgaver i bøkene som her blir omtalt enn hos for eksempel Alexander og Skjulstad (1951).

5.3.4 Analyse av eksamensoppgaver utviklet for læreplanen for den videregående skole 1976

Studien av eksamensoppgavene fra denne perioden tar utgangspunkt i studieretning for allmenne fag, naturfaglinja (Jasper 1984, 1992). Først tar jeg for meg oppgavene for 2MN fra 1976 til 1984. Beviset for sinussetningen skal tydeligvis være godt kjent i dette faget da det spørres etter dette ved de utsatte eksamenene både i 1976 og 1977. Det påfølgende året, 1978, inneholder eksamen en oppgave hvor formelen for $\cos(u-v)$ og $\cos(u+v)$ skal utledes. Videre frem til 1984 finner vi ikke de samme spørsmålsstillingene i eksamensoppgavene. Derimot finnes oppgaver på den mer tradisjonelle formen «vis at».

I 3MN-oppgavene fra samme periode dukker induksjonsbeviset opp ved den utsatte eksamenen 1977. I oppgave V b) skal det føres et induksjonsbevis for at antall diagonaler i en n-kant er $M_n = \frac{(n-3)n}{2}$. Dette var en sjelden type eksamensoppgave, men var tross alt læreplanfestet. Ved den utsatte eksamenen i 1981, i oppgave III, møtte elevene en liknende oppgave med induksjonsbevis. Andre oppgaver med klare krav til argumentasjon er gitt ved oppgave IV (utsatt eksamen 1978) der utledningen av L´Hôpitals regel[28] er oppgitt. Eksaminandene skal grunngi hvert steg som er gjort i overgangene og senere bruke regelen til å regne ut grenseverdier. Fra 1976 til 1984 er regneoppgavene de dominerende, særlig elementær kalkulus.

I perioden 1987-1992 er eksamensoppgavene i 2MN veldig like. Det er stort sett de samme temaene og formuleringene som går igjen. Delvis også rekkefølgen. Bevis gjør seg ikke særlig gjeldende blant disse temaene, men ved enkelte anledninger forekommer spørsmålsstillinger som åpner for bevis uten at den mest stringente formen kreves. De

---

[28] $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

fremste eksemplene på dette finnes i vår og høst-eksamenene 1989 samt våren 1990. Ved våreksamenen skulle elevene i oppgave II a) vise at arealet av en trekant med toppunkt i A, B og C med motstående sider *a*, *b* og *c*, kunne skrives som $\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C$.

Eksamensoppgaver i geometri gjorde seg mest gjeldende i forbindelse med vektorregning i denne perioden. Høsteksamenen hadde også oppgave II a) som la opp til noe som kan likne et bevis. Her skulle det vises at $\sin^2 v+\cos^2 v=1$ for alle vinkler v. Oppgave III d) 3) ber eksaminanden vise at tre punkter i et trapes ligger på en rett linje. I oppgave IV blir definisjonsmengden til en funksjon, f(x), oppgitt. I a) ble det spurt om å vise at funksjonen er kontinuerlig i hele denne definisjonsmengden. (Kontinuerlige funksjoner er et eksempel på tema som skiller de mest stringente bevis fra de som anvendes i skolen. Definisjonene det gås ut ifra er forskjellige. I skolesammenheng forklares ofte kontinuerlige funksjoner som en graf som kan tegnes uten å løfte pennen, mens bruk av ε -δ -notasjon er påkrevet for en matematiker.) Verifisering av denne påstanden dreiet seg her om grenseverdibetraktninger. Fra 2MN er det ikke nevneverdig mer å hente om bevisliknende oppgaver i denne perioden.

Eksamensoppgavene i 3MN fra denne perioden bruker bevisformuleringen ved tre tilfeller. Oppgave I c) fra våren 1988 ber om et bevis for setningen for logaritmen til en brøk. Oppgave II a) fra våren 1990, stiller krav om et bevis for formelen for delvis integrasjon mens i oppgave V a) fra høsten samme år skal det bevises at $(a^x)'=a^x \ln a\, ,\, a>0$ etter at det har blitt oppgitt at $(e^x)'=e^x$. Av «vis at»-oppgaver finnes ikke mange som åpner for bevisliknende argumentasjon. Unntakene finner vi fra høsten 1987, oppgave V a) og høsten 1988, oppgave III a). Førstnevnte ber om en utledning av formelen $(\tan x)'=1+\tan^2 x$, mens ved det andre tilfellet skal det vises at for funksjonen $f(x)=ae^{bx},\, D_f=R$ gjelder sammenhengen $\sqrt{f(s)\cdot f(t)}=f(\frac{s+t}{2})\; for\, alle\, reelle\, tall\, s\, og\, t$ med konstantene *a* og $b\in\mathbb{R}$ og *a*>0. Utover dette er hovedtyngden av eksamensoppgavene på regning og praktisk bruk av matematikk. Det er dog verdt å merke seg at det er bevis i eksamensoppgavene for 2MN og 3MN. I 1MA ble, ifølge læreplanen, bevis tydelig nedprioritert, men ut ifra eksamensoppgavene kan det tyde på at det stod sterkere i studieretningsfagene 2MN og 3MN.

5.4 Læreplanverket for videregående opplæring av 1994 (R94)

R94 fastslo at alle 16-19-åringer hadde rett til tre års videregående opplæring som enten gav yrkeskompetanse eller studiekompetanse. Det var mulig for elever med to års yrkesfaglig bakgrunn å ta ett års allmennfaglig påbygning for å sikre seg generell studiekompetanse. Opplæringen skulle bygge videre på det faglige, pedagogiske og verdimessige fundamentet som ble lagt i grunnskolen, samtidig som videregående opplæring skulle legge et fundament for høyere utdanning og yrkesutøvelse i arbeidslivet. Målet var å sikre alle et tilbud om opplæring som gav studiekompetanse og/eller yrkeskompetanse. Det var viktig å sikre alle som begynte i videregående opplæring, formell kompetanse og sikre en god sammenheng mellom nivåene og mellom opplæring i skole og opplæring i bedrift. I tillegg skulle alle grupper av elever, uansett evner og anlegg, ha anledning til å utvikle sine muligheter (KUF[29] 2003).

5.4.1 Den generelle læreplanen for R94

Den generelle læreplanen ble utarbeidet i 1993 og innført med R94 og L97[30]. Den gjelder for grunnskole, videregående opplæring samt voksenopplæring, og er videreført i den nyeste læreplanen K06. Alle disse læreplanene har samme generelle del. Læreplanenes generelle del nevner tre tradisjoner opplæringen skal tuftes på. Det legges vekt på at hver generasjon skal utvikle ny kunnskap på grunnlag av tidligere arbeid og samtidig yte et «skapende bidrag» for våre etterkommere. Den første tradisjonen er knyttet til praktisk virke og læring gjennom erfaring. Den andre er mer relevant med tanke på temaet i oppgaven, nemlig logikk og bevisføring. Elevene skal trenes i tenkning, utforming av hypoteser og undersøke dem. Videre skal de trekke slutninger og avgjøre ved resonnement, observasjoner og eksperimenter. Til sammen skal dette være en øvelse i å uttrykke seg klart i forbindelse med argumentasjon, drøfting og bevisføring (Udir 2006). Avslutningsvis har vi den kulturelle tradisjon, men denne omtales ikke videre her. De påfølgende overskriftene «kritisk sans og skjønn» og «vitenskapelig arbeidsmåte og den aktive elev» understreker betydningen av å inneha kompetansen nevnt i den andre tradisjonen. Med vitenskapelig arbeidsmåte menes utvikling av kreative og kritiske evner som kan skape undring og evnen til å stille nye

[29] Kirke, utdannings-, og forskningsdepartementet

[30] Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen

spørsmål. «Den aktive elev» tilegner seg kompetansen til å skaffe seg kunnskap. Skolen er ikke bare et sted hvor *lærdom* blir overført fra lærer til elev, men også en slik *kompetanse*. I forbindelse med kritisk tenkning nevnes det å kunne sjekke holdbarheten til ulike ledd i en tankerekke, noe som er veldig nært knyttet til matematisk bevisføring.

5.4.2 Læreplanen for matematikk i R94

Læreplanen for matematikkfaget ble revidert i år 2000, noe som blant annet medførte en endring i hovedmomentene og diverse utskiftninger av pensum. Særlig viktig, med tanke på oppgaven, var det at det ble foretatt endringer i kravene til bevisføring. Der ikke annet er spesifisert bruker oppgaven betegnelsen R94 om den seneste, reviderte versjonen av læreplanen. Mer om de konkrete forskjellene blir behandlet i seksjon 5.4.3 og 5.4.4. Den reviderte læreplanen i matematikk innledes med et kapittel med generell informasjon inkludert to delkapitler (*1.1 Matematikk i praksis* og *1.2 Matematikk i skolen*). Her nevnes betydningen av matematikk som verktøy med fokus på praktiske anvendelser og matematikk som skolefag. Synet på matematikken som, primært, et redskap står sterkt hos veldig mange. Læreplanen bemerker derfor at matematikk er mer enn anvendelser ved å påpeke at faget har en egen struktur med problemstillinger, metoder og teknikker som knytter faget sammen. I skolesammenheng skal elevene blant annet lære om anvendelser, metoder, regneteknikk og videreutvikle sin «matematiske intuisjon». Intuisjon er en viktig egenskap når det gjelder å arbeide kreativt med matematikk og en nødvendighet når det gjelder å bevise nye teoremer. For å løse et problem er man avhengig av å prøve ut nye ideer, utforske, finne sammenhenger og danne seg hypoteser. Et eksempel på matematisk intuisjon viser seg når elever løser matematikkoppgaver uten å ha lært algoritmene for oppgavene. Det kan virke som at elevene forstår problemet, men har vansker med å forklare fremgangsmåter og sier de bare har tenkt seg til løsningen (Indresæter 1998).

Bevis omtales ikke mye i læreplanens to første delkapitler. Det blir presisert at det ikke er tilstrekkelig med korrekte utregninger i matematikken, også resonnementet må stemme. Videre sies det at i matematikken godtas ikke nye resultater før de er bevist, men at innenfor skolematematikken kan ikke alt bevises fra bunnen av. Det vesentlige er at elevene får en forståelse for den logiske strukturen og *blir kjent* med noen enkle, men slående bevis. Det er verdt å legge merke til formuleringen «blir kjent med», som ikke blir nærmere forklart. Betydningen av dette er ikke helt klart, men et strengt mål er det ikke.

De ulike matematikkfagene i R94

Matematikkfaget deles inn i tre enheter første år: 1M, 1X og 1Y. 1M er grunnenheten og felles for alle studieretninger. Denne delen skal styrke elevenes grunnleggende innsikt og ferdigheter i matematikk med særlig fokus på behov i dagliglivet, samfunnet og yrkeslivet. Det skal i så stor grad som mulig ta utgangspunkt i praktiske problemstillinger knyttet til daglig- og yrkesliv, selv om elevene skal ha mulighet til å utforske matematikken uten at det er direkte koblet til anvendelser. Etter 1M følger 1Y eller 1X. 1Y tar opp tråden med vektlegging av praktiske anvendelser, men skal også finne frem til nye sammenhenger ved bruk av kreative evner. 1M og 1Y (tas samme år) legger grunnlaget for studieretningsfaget[31] 2MY, senere kalt 2MZ, og 3MZ det tredje året. Fra og med skoleåret 2001/02 ble betegnelsen 2MY og 3MY erstattet med henholdsvis 2MZ og 3MZ. En viktig forskjell innebar en reduksjon i timeantallet. 2MY var et 5-timersfag mens 2MZ hadde 3 timer i uka. Kravene i læreplanen er derfor lavere i 2MZ-faget enn i 2MY. I 1X skal det undervises i teknikker og ideer som gir elevene større matematisk innsikt, og at dette skal danne et grunnlag for egne undersøkelser og eksperimenter. 1X kvalifiserte for 2MX som igjen gav muligheten til å ta 3MX.

Mål og hovedmomenter i førsteårsenhetene:

Det nærmeste vi kommer bevisføring på dette trinnet er i «Mål 4: Geometri». I punkt 4a heter det at «elevene skal kunne påvise at figurer er formlike». Her kan man se konturene av et deduktivt resonnement, hvor et premiss er figurenes konstante vinkelsum. Å kalle det et matematisk bevis ville være å overdrive, men tendensen er der. Elever har også blitt testet i dette lærestoffet ved eksamen[32]. Bevis er ikke et utpreget tema i førsteårsenhetene.

Mål og hovedmomenter i andre- og tredjeårsenhetene:

> Mål 1: Kultur, språk og kommunikasjon
>
> Elevene skal kunne tolke og formidle matematisk informasjon på muntlig, skriftlig og grafisk form. De skal kunne gjennomføre matematiske resonnementer, ha innblikk i matematikkens historie, og kjenne til noe av fagets betydning for samfunns- og kulturliv (KUF 1999).

Dette målet gjelder alle fordypningsfagene i matematikk, det vil si 2MX, 2MZ, 3MX og 3MX. Matematiske resonnementer er altså noe elevene skal beherske og utføre på egen

[31] Valgfritt spesialiseringsfag for elevene

[32] Omtales i seksjon 5.4.4 *Analyse av eksamensoppgaver fra R94*

hånd. Men dette er ikke nødvendigvis knyttet direkte til bevisføring. Hovedmomentet *1c* sier at

> Elevene skal kjenne begrepene implikasjon og ekvivalens og være kjent med noen vanlige matematiske bevistyper (KUF 1999).

Videre heter det i *1d* at

> Elevene skal kjenne matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og kunne gjennomføre matematiske resonnementer (Ibid.).

Å *kjenne* og *være kjent med* er altså verbene som blir brukt med tanke på bevis. Hva taksonomisk nivå angår, befinner disse seg på det første og laveste trinnet (*faktakunnskaper*) av de seks i Blooms hierarkiske system for kunnskap, blant *gjenkjenne* og *gjengi*. Når det gjelder resonnement tilsier ordvalget *gjennomføre* at kravene skjerpes. Jamfør Blooms taksonomi befinner man seg her på det tredje nivået (*anvendelser*). Beviset er ikke videre omtalt i målene for fordypningsfagene.

5.4.3 Lærebøker utviklet for R94

Sinus 2MX og *3MX* ble utgitt i henholdsvis 1995 og 1999. De er begge utarbeidet etter første utgave av R94.

***Sinus 2MX* (Oldervoll, et al. 1995)**
I forordet kan det leses at Sinusbøkene i grunnkurset legger stor vekt på øvelser i regneferdighet, men at det her satses på å utvikle elevenes evne til abstrakt tenkning. Det bemerkes at elevene får «en grundig innføring i tradisjonell matematikk, der bevisene har en sentral stilling». Denne læreboka har også et utdrag av læreplanens mål og hovedmomenter, men hvor vi finner klare avvik i forhold til den reviderte utgaven av læreplanen gjengitt i den tidligere omtalte bokserien. Sinus sier i *1d* at elevene skal *kunne forstå og gjennomføre matematiske bevis og resonnement* (Oldervoll et al. 1995: 314). Dette er et mye strengere krav enn det som stilles i læreplanen som boka *Matematikk 2MX* viser til, som er den samme som er omtalt i oppgaven for øvrig. Bokens innhold er også deretter. Her finnes flere bevis, spesielt i teorien som behandler derivasjon og grenseverdier. Blant annet bevises det når funksjoner er kontinuerlige og deriverbare, samt at en funksjon alltid er kontinuerlig i et punkt hvor den er deriverbar. Bevis for produktregelen, kjerneregelen og L´Hôpitals regel

utledes også i tillegg til en rekke derivasjonsregler. Innenfor geometrien blir sinus- og cosinussetningen samt arealformler utledet.

Logikken blir omtalt i bokens første kapittel hvor logiske symboler, blant annet ekvivalens- og implikasjonspiler er sentralt. Til tross for forholdsvis stor vektlegging av bevis i teorien i denne boka er oppgavene preget av «finn» og «regn ut». *Sinus 2MX* inneholder teori om rekker og L´Hôpitals regel, men nevner ikke integrasjon. Etter revideringen av R94 i 2000 kom bøker med mer innhold av integrasjon.

***Sinus 3MX* (Oldervoll et al. 1999)**
Forordet i boka siterer sin forgjenger på at elevene skal få en grundig innføring i tradisjonell matematikk. Deretter omtales nye temaer som analytisk plangeometri og vektorregning. *Sinus 3MX* inneholder omtrent like mange bevis som *Sinus 2MX*, og viser til bevisene fra forgjengeren der de utelates, da en del av temaene går igjen. Integrasjon er et nytt tema i boka og her bevises flere formler, blant annet integrasjon ved substitusjon, delvis integrasjon og areal mellom grafer. I tillegg utledes logaritmereglene, sammenhengen mellom sentral og periferivinkler, formler for volum av ulike figurer samt derivasjonreglene

$$(e^x)' = e^x \quad \text{og} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Oppgavene i boka har utviklet seg fra *Sinus 2MX*. I kapittel 8 *Integrasjonsmetoder* møter elevene problemer formulert som «bevis at». Den mer tradisjonelle «vis at» er også med, men bevisoppgavene dominerer. Disse oppgavene dreier seg hovedsakelig om å finne formler for volum og forholdet mellom ulike figurers volum. Flere av disse oppgavene forutsetter kunnskap utover det å regne ut og verifisere. Her må elevene også bruke symboler fremfor tall for å sikre generell gyldighet. I de andre kapitlene domineres spørsmålsstillingene av «finn», men det finnes unntak, blant annet innenfor vektorregningen hvor vi finner oppgave 2.13 c) der det skal bevises at addisjon av to vektorer er en kommutativ prosess:

> Bevis at $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ for alle vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Bevis gjerne påstanden både ved regning og ved hjelp av geometri (Oldervoll et al. 1999: 48).

Enda en bevisoppgave finnes i oppgave 4.24 hvor det skal bevises at $\angle A + \angle C = 180°$ i en firkant ABCD innskrevet i en sirkel. Et interessant moment er at også denne boka i likhet med den andre boka i *Sinus*-serien (*Sinus 2MX*) inneholder flere temaer som ikke nevnes i den reviderte læreplanen. Det være seg hypotesetesting, differensiallikninger, delbrøksoppspalting og sentral- og periferivinkler.

***Matematikk 2MX* (Erstad et al. 2001)**

Temaene i boka er *Likninger og ulikheter, eksponentialfunksjoner og logaritmer, Trigonometri, Derivasjon, Sannsynlighetsregning og kombinatorikk, Vektorer og avslutningsvis Integrasjon*. Her er regneregler og algoritmer et sentralt tema. En grunn til dette kan være at mange av temaene var nye fra 1MX-faget. De operasjonelle ferdighetene som Sfard nevner, synes å prioriteres først. Hennes teori sier som nevnt i kapittel 3.1 at den operasjonelle forståelsen skal danne fundamentet for den strukturelle. Likninger og ulikheter er et kjent tema for elever som tok 2MX, så dette kapittelet tar teorien et steg videre og trekker frem teori om de to bevistypene direkte og indirekte bevis i bokas kapittel 1.7. Her er det hovedmomentet 1c fra læreplanen som gjør seg gjeldende[33]. Til en viss grad kan vi også si at 1d også er med, selv om det kan diskuteres om resultatene *summen av to rasjonale tall er et rasjonalt tall* og *summen av et rasjonalt tall og et irrasjonalt tall er et irrasjonalt tall* er sentrale. Den første setningen blir bevist ved et direkte bevis med implikasjonspilene læreplanen nevner, mens den andre bevises gjennom et indirekte bevis. Bevisets inntog i dette kurset nevnes også spesifikt i forordet. Her sies det også at boka inneholder bevis som er knyttet til fremstillingen av lærestoffet, noe som hovedsakelig gjør seg gjeldende ved å finne et generelt uttrykk for den deriverte av $f(x)=x^2$.

***Matematikk 3MX* (Erstad, et al. 2002)**

Den tredje boka i serien viderefører integrasjon, trigonometri, vektor- og sannsynlighetsregning. Det nye stoffet er periodiske funksjoner og rekketeori. I motsetning til forgjengeren nevner ikke forordet her matematiske bevis. Her legges det derimot mer vekt på matematikkens historie. Allikevel viser det seg at i denne boka utledes flere av formlene elevene benytter seg av. 3MX-boka skiller seg slikt sett relativt mye fra 2MX, selv om ikke alle begrunnelsene som gis kvalifiserer til å kunne kalles bevis. Rekketeorien er første kapittel og innleder litt forsiktig med en formulering som sier at «det kan bevises» at den harmoniske rekka $\sum(\frac{1}{n})$ divergerer. Senere i kapittelet derimot, gjøres nettopp dette ved å vise til det eldste beviset utført av Nicole Oresme ca. 1350 (Erstad et al. 2002: 44)

[33] Se seksjon 5.4.2 *Mål og hovedmomenter i andre- og tredjeårsenhetene*

På side 19 og 26 bevises henholdsvis summeformlene for aritmetiske og geometriske rekker. Innenfor andre temaer som periodiske funksjoner og vektorfunksjoner utledes bevis for den deriverte av sinusfunksjonen, volum av omdreiningslegemer og formelen for areal av sirkelsektorer. Oppgavene følger ikke opp bevisene i samme grad. Det ser ut til at bevisene primært er tatt med for å begrunne utregninger og ikke for at elevene skal trenes i bevisføring. Primært er øvelsene gitt ved «finn» og «regn ut», og det som likner bevis mest er verifiseringsoppgaver, fremstilt som «vis at» eller en gitt påstand/formel med et påfølgende «sjekk om formelen stemmer». Det ble ikke stilt krav til, ifølge den reviderte læreplanen, at elevene skulle kunne føre matematiske bevis, men *kjenne til* bevis og bevistyper. Det å *kjenne* og *kjenne til* blir generelt regnet som de svakeste kravene til elevene ved R94 (intervju Lindstrøm). Oppgaveformuleringen avgjør ofte hvor vanskelig elever anser oppgaver å være. Selve oppgavene kan være identiske, men *bevis* er et ord mange elever har stor respekt for og som gjør at de ofte lager større problemer for seg selv enn det som er nødvendig. «Vis ved regning» er den enkleste varianten. Deretter følger «vis at» og til slutt «bevis» som det vanskeligste. I enkelte sammenhenger kan regning faktisk anses som et gyldig bevis så lenge utregningene og resonnementet er logisk, noe elever sliter med å fatte (intervju Lindstrøm). Forskjellene ligger i hvor sannsynlig det skal være at konklusjonen i resonnementet er riktig. Når det skal *vises* at noe er sant er det ofte tilstrekkelig å komme frem til noe som virker overveiende sannsynlig. Ved bevis derimot skal det ikke være rom for tvil overhodet. Skolematematikken kan ikke være for omstendelig i sin bevisføring, og i mange tilfeller må det bygges på den intuitive forståelse. «Vis at» er derfor en mer passende formulering enn «bevis at» i mange situasjoner.

Det synes klart at *Sinus*-bøkene som følger den opprinnelige læreplanen stiller vesentlig høyere krav til elevene enn hva andre lærebøker fra den reviderte læreplan gjør, hva angår bevis. Dette tyder også på at den oppfattede læreplanen senket kravene til bevisføring og la mindre vekt på bevisteori.

5.4.4 Analyse av eksamensoppgaver utviklet for R94

Det er naturlig å skille mellom eksamensoppgavene som ble gitt før og etter revideringen av læreplanen da det er klare forskjeller mellom hvilke krav som elevene har møtt når det gjelder bevis. Det er også verdt å nevne at samsvaret mellom læreplanen R94 og de tilhørende eksamensoppgavene har blitt oppfattet som dårlig (intervju Lindstrøm).

Oppgavene gitt til eksamen før revideringen inneholdt flere bevis. Fra våren 1997 skulle det bevises at arealet av en sirkelsektor er gitt ved $F(x) = x + \sin(x)$. Dette minner veldig om en tradisjonell «vis at»-oppgave, men ut ifra løsningsforslag som er gitt (Nesse 2001) krever det innsikt utover enkle verifiseringer, i tillegg til en viss deduktiv tilnærming. Når argumentasjonen også må kunne betraktes som 100 % «vanntett» vil det ikke være noe i veien for å kalle dette et matematisk bevis. Formuleringen «bevis» er avgjørende for hvilket krav som stilles ved oppgaven. Våren 1999 byr på en interessant oppgave i 1 d) 3). «Bevis Lagranges identitet[34]». Stort tydeligere er det vanskelig å formulere en bevisoppgave. Året etter, våren 2000, skulle dessuten et spesialtilfelle av Apollonius setning[35] bevises. I oppgave 5 e) fra det andre prøvesettet, fra eksamenssekretariatet, var det et spesialtilfelle av Arkimedes´ formel[36] som skulle bevises. Bevisoppgaver var tilsynelatende gjengangere i denne perioden. Det var ikke mange av dem ved hver eksamen, men de dukket opp ved flere eksamener.

I perioden 2003-2008 er det verdt å merke seg at ordet «bevis» er nærmest fullstendig fraværende fra samtlige av R94s eksamensoppgaver i matematikk. Dette inkluderer oppgavene hentet fra:

- Første år, videregående: 1X, 1Y, 1MX, 1MY (elever med og uten IKT, samt privatister)
- Andre år, videregående: 2MX, 2MZ (elever med og uten IKT, samt privatister)
- Tredje år, videregående: 3MX, 3MZ (elever med og uten IKT, samt privatister)

Det eneste som tilsier at «bevis» ikke er helt utelatt er en introduksjon til oppgave 5 e) i 3MX (elever og privatister) fra H03. Denne sier:

> Når en kurve K er gitt i polarkoordinater ved likningen $r = r(\theta)$, kan man bevise at lengden L av kurven mellom $\theta = \alpha$ og $\theta = \beta$ er gitt ved formelen

---

[34] $|a \times b^2| = |a^2||b^2| - (a \cdot b)^2$

[35] La A og B være to faste punkter. Dersom P(x,y) er et vilkårlig punkt slik at $\frac{PA}{PB} = k\,(k \neq 1)$, så ligger P på en sirkel.

[36] $A = \frac{2}{3} \cdot g \cdot h$ der A er arealet under en parabelbue og g og h er henholdsvis «grunnlinjen» (Xverdi2-Xverdi1) og parabelbuens maksimale høyde.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta \quad \text{(Udir 2005).}$$

En slik oppgave ville det selvsagt vært urimelig at en elev uten videre skulle bevise, men det er interessant å se på formuleringen som gis. Oppgaven kunne like gjerne bare oppgitt formelen for lengden av kurven og bedt elevene om å regne ut svaret. Selv om bevisformuleringene i eksamensoppgaver og lærebøker uteblir er det viktig å få frem at bevisene ikke nødvendigvis er borte.

> Sammenligner man ældre lærebøger med nyere, kan man se, at beviser nu fører en mere tilbagetrukken rolle – tilsynelatende. Ser man rigtigt efter, opdager man imidlertid, at selv om ordet bevis og den formalistiske, fagmatematiske opstilling af beviser stort set er forsvundet fra i hvert fald folkeskolens lærebøger, lever beviset i sin pædagogiske funktion videre i bedste velgående: Forklaringen på hvorfor tingene hænger sammen, som de gør. (Beck 1997: 57)

Ved 3MX-eksamen for privatister fra V05 skulle elevene *forklare* et *motbevis* av en påstand. Noe formelt bevis er det dog ikke snakk om. Slike forklaringer finnes i flere andre eksamensoppgaver i denne perioden, men der har de ingen formuleringer knyttet til bevis i seg.

Fremfor å *bevise* påstander er formuleringen «vis at» svært populær i R94s oppgaver. Disse ordene går stort sett igjen ved alle eksamenene (noen unntak i de mer grunnleggende kursene 1MX, 1MY, 1X, 1Y, samt privatisteksamen i 2MX, våren 2008, hvor det har blitt utelatt). Betydningen av «vis at» er ikke entydig. Å *vise* gir elevene større handlingsfrihet. Det dreier seg om å overbevise en annen part om at noe gjelder. I eksamensoppgaver er det sensor som representerer denne parten. Hvordan det gjøres, er opp til den som skal overbevise. Hva som *gjelder* er en subjektiv vurdering og gir rom for tolkning. Det er viktig å være oppmerksom på skillet mellom bevis i og utenfor skolen, for sensor kan ikke kreve et bevis i sin mest stringente form som skal fjerne all tvil hos den mest skeptiske matematiker.

Eksamensoppgavene inneholder vurderingskriterier hvor det står at det legges vekt på at elevene viser grunnleggende ferdigheter, at de kan bruke hjelpemidler og gjennomføre logiske resonnementer. Videre skal de se sammenhenger i faget, være oppfinnsomme og kunne anvende fagkunnskap i nye situasjoner. Det er tydelig at logikk og resonnement spiller en sentral rolle i vurderingen, men disse momentene gjør seg ikke like gjeldende i form av oppgaver i bevisføring. Enkelte oppgaver har dog noe mer innhold av deduktiv tenkning enn andre, og blant eksamenene i denne perioden er det kanskje oppgave 5 i 1MY-eksamen fra våren 2004 som skiller seg mest ut. Her må elevene kjenne til regler som gjelder for trekanter og femkanter for deretter å bruke disse til å finne vinkler og vise formlikhet. Oppgave 5 i 2MX (privatisteksamen) fra våren 2007 bærer også preg av mer stringent argumentasjon. Dette kommer til uttrykk ved at eksaminandene skal finne vinkler og verifisere formler for areal ved bruk av sentral- og periferivinkler. (Slike vinkler var ikke en del av R94s pensum etter 2000, men oppgaven gav tilstrekkelig informasjon til at den kunne løses.) Ser vi tilbake på læreplanens kapittel 1.2 *Matematikk i skolen* nevner den avslutningsvis at en læreplan må vurdere nøye hvilke utfordringer elevene skal møte sett fra både et faglig og pedagogisk perspektiv. R94 fremhever regneferdighet, teoriforståelse, praktiske anvendelser, problemløsing, historisk innsikt og tekniske hjelpemidler blant temaer som skal knyttes til ulike emner i faget. Emnene skal ifølge R94 «ha passende vanskelighetsgrad og et innhold som kan forsvares ut fra sine anvendelser eller sin betydning for videre arbeid med faget» (KUF 1999). Videre sies: «Det kan av og til være aktuelt å ta med stoff som ikke forsvarer en plass ut fra strengt nyttemessige kriterier, men som leder til gode oppgaver eller overraskende innsikt» (Ibid.). Det er tydelig at bevisoppgaver ikke har kommet inn under denne kategorien med gode, innsiktsgivende oppgaver. Om de faller utenfor «passende vanskelighetsgrad» eller ikke leder til «gode oppgaver» med «overraskende innsikt» skal være usagt, men noen stor rolle har ikke beviset hatt i disse eksamenssettene.

5.4.5 Utformingen av R94

(Delkapittelet bygger i sin helhet på et intervju med professor Tom Lindstrøm)

R94 var en læreplan med sterk satsing på virkelighetsnær matematikk. Elevene skulle lære om praktiske anvendelser matematikken og eksperimentere mye på egenhånd. Det var i denne reformen den grafiske lommeregneren ble innført og forhåpningene var store knyttet til den eksperimentelle bruken av den, så vel som bruken ved utregninger. Når det gjelder bevis var det ingen stor diskusjon rundt beviset som et selvstendig tema i skolen, men det var noe uenighet om hvordan tilnærmingen til utviklingen av resonneringsevnen skulle foregå. Noen mente at elevene skulle oppdage fenomener på egenhånd og senere argumentere for dem, mens andre ønsket argumentasjon innenfor et allerede eksisterende rammeverk. Det var også noe diskusjon rundt presisjonsnivået i argumentene elevene måtte presentere i oppgaver. Enkelte gav uttrykk for at det var tilstrekkelig med forklaringer som virket overbevisende, men som ikke nødvendigvis var 100 % vanntette, og hvor ikke alle antakelser var tatt med. Dette ble møtt med skepsis av andre som talte for en mer stringent, logisk oppbygning av argumentasjonen.

Kravene til elevene er gitt gjennom ulike verb i læreplanene. Å «kjenne» og «kjenne til» er to vanlige formuleringer for måloppnåelse i R94. Arbeidet med å finne de riktige formuleringene var vanskelig av flere grunner. For det første ville det bli et dårlig og lite varierende språk hvis de samme verbene ble brukt hele tiden. For det andre har ikke nødvendigvis alle verb den samme betydningen i alle sammenhenger. Dessuten var det bestemt at målene skulle være på formen «elevene skal». Enkelte medlemmer av læreplangruppa følte at med denne formuleringen, innebar dette at målene måtte være overkommelig for alle elevene. En del av gruppa følte at dette var urealistisk, for eksempel i tilfellet med matematiske bevis. Generelt er å «kjenne» og «kjenne til» de minst forpliktende kravene elevene møter. Grunnen til at elevene etter revisjonen i 2000 gikk fra kanskje det høyeste kravet ved «forstå» til det laveste «kjenne til» kan ha vært læreplangruppas forståelse av «elevene skal»-formuleringen. Hvis den innebærer at alle elevene skal beherske stoffet er det naturlig med en mer realistisk verbbruk hvor lista legges lavere.

Begrepene «bevis» og «resonnement» hadde noe ulik betydning, hva krav til gyldighet angikk. Beviset dannes ved et klart logisk resonnement som bygger på noe. I skolesammenheng kunne det ikke kreves at dette skulle være å gå helt tilbake til Euklids aksiomer, men det kunne bygges videre på matematikk fra ungdomsskolen og noe rimelig matematisk intuisjon. Resonnementet hadde ikke de samme kravene knyttet til seg og hadde som formål å overbevise «de aller fleste» uten at det krevdes den nøyaktigheten som finnes for eksempel i ε -δ -bevis.[37]

Medlemmene i læreplangruppa hadde alle sine «hjertebarn» de ønsket å få med i pensum. Det foregikk også diskusjoner om matriseregning burde innføres i videregående skole. Men siden det var så mange andre temaer som skulle med og det faktum at det ville ta mange undervisningstimer før de praktiske anvendelsene av matriseregningen kom til syne, ble det utelatt. Induksjonsbeviset er ikke med i R94 og trolig var det av samme grunn dette ble valgt bort. Det kunne fort ha blitt en isolert del i pensum som ikke hadde tilknytning til praktiske

[37] Stringent bevistype som ofte benyttes når egenskaper, som f.eks. kontinuitet, ved funksjoner undersøkes. Videre kan det brukes til å bevise at en funksjon har en grenseverdi i et gitt punkt.

problemer, eller at det ville ta for lang tid å komme inn på anvendelsene. Hvis induksjonsbevis var den eneste bevisformen elevene møtte ville det vært muligheter for at de kunne få et feilaktig bilde av hva bevis og bevisføring er, da det her i større grad finnes et oppsett, eller en mal, for hvordan det skal gås frem og den kreative virksomheten hovedsakelig dreier seg om å finne den korrekte induksjonshypotesen.

Når det gjaldt bevisets rolle i R94 ble den til dels oppfattet som redusert i forhold til læreplanen fra 1976.

> Jeg følte jo på en måte at beviset i stor grad forsvant ut av skolematematikken med R94, eller muligens med den revisjonen som kom etterpå. Jeg er ikke helt sikker på hvor dette her skjedde. Fordi det var jo ikke intensjonen fra læreplangruppas side. Vi hadde disse punktene om bevis og mente at det absolutt måtte være med. Det kunne være litt uenighet om form og så videre, men vi ville ha det med (intervju Lindstrøm).

Det finnes klare tegn på at undervisningen også har nedprioritert beviset under R94. Nye matematikkstudenter er ikke vant med språkbruken i bevisføringen og å argumentere for at et resultat virker. Mange lærere har også gitt uttrykk for at det ofte har blitt utelatt. Dette skyldes tidspress og lærebøkenes beskjedne omtale av temaet. I tillegg ble det en periode, særlig etter 2000, ikke prøvd ut i særlig grad ved eksamen. Det var vanskelig å få knyttet inn bevis i eksamensoppgavene da temaene var dårlig egnede for bevisføring. R94 hadde relativt lite klassisk plangeometri, men mye funksjonslære. Innenfor sistnevnte tema, med derivasjon og integrasjon, ville det bli for vanskelig å føre presise bevis.

Bevisoppgavene i eksamenssettene ble ofte plassert som et siste problem i en større oppgave som skulle teste flere områder fra pensum. Disse bevisene skulle ikke telle all verden, for det var en kjent sak at elever slet med dette. Det viste seg også at mange ikke visste hva de skulle gjøre i disse oppgavene.

5.5 Kunnskapsløftet 2006 (K06)

Kunnskapsløftet er den nyeste reformen i grunnskolen og videregående opplæring og har medført flere endringer i skolens innhold, struktur og organisering fra første trinn i grunnskolen til siste trinn i den videregående skolen. K06 er den første læreplanen som behandler både grunnskole og videregående skole. Reformen ble satt i gang august 2006 og omfattet fra høsten 2007 elevene på 1.-10. trinn i grunnskolen og på første og andre trinn i den videregående skole (KD[38] 2006).

5.5.1 Læreplanen for matematikk i K06

Kunnskapsløftet satser stort på det som kalles *grunnleggende ferdigheter*. Dette innebærer:
1) å kunne uttrykke seg muntlig
2) å kunne uttrykke seg skriftlig
3) å kunne lese
4) å kunne regne
5) å kunne bruke digitale verktøy
I matematikk betyr 1) å gjøre seg opp en mening, stille spørsmål, argumentere og forklare en tankegang ved hjelp av matematikk. 2) handler om å kunne løse problemer ved hjelp av matematikk, beskrive og forklare en tankegang og sette ord på oppdagelser og ideer. 3) omhandler evne til tolkning og nyttiggjørelse av tekster med matematisk innhold og med innhold fra dagliglivet og yrkeslivet. 4) dreier seg om problemløsing og utforsking som tar utgangspunkt i praktiske, hverdagslige situasjoner og matematiske problemer mens 5) handler om bruk av teknologi til spill, utforsking, visualisering og publisering. Disse ferdighetene er et minimumskrav for hva elevene skal kunne ved endt skolegang. Med matematiske bevis i tankene er det særlig de to første punktene som er relevante. Å stille spørsmål, argumentere samt beskrive og forklare en tankegang er elementer som fremtrer i ethvert bevis. Dette er ikke ensbetydende med at bevisføring er en grunnleggende ferdighet for alle, men det er en klar indikasjon på at bevisprosessen er et satsningsområde i K06. Dette støttes i innledningen «føremålet med faget» hvor utviklingen av logisk tenkning nevnes som en essensiell del av faget. I programområdet for realfag anses beviset sågar som en grunnleggende ferdighet[39] for elever som velger en slik spesialisering.

De ulike matematikkfagene i K06

Det har i Kunnskapsløftet blitt innført en rekke endringer i fagbetegnelser fra R94. Førsteårsenheten 1MX har blitt erstattet[40] med 1T mens 1MY nå heter 1P. 1T legger grunnlaget for R1, tidligere 2MX/2MN, som har et realfaglig fokus. På det andre årstrinnet,

[38] Kunnskapsdepartementet

[39] Se *kompetansemål etter andre- og tredjeårsenhetene* i seksjon 5.5.1.

[40] Fagene er også noe endret innholdsmessig, de har ikke kun skiftet navn. F.eks er ikke 1T det samme som 1MX, men siden fagene er såpass like og tilsvarer samme aldersnivå tillater jeg meg å bruke ordet «erstattet».

som i K06 heter VG2, er det tre andre mulige matematikkfag å velge blant. Etter innføringen av Kunnskapsløftet har det blitt obligatorisk for alle elever med to års matematikk. Et resultat av dette er fire matematikkfag ved VG2. De tre andre fagene er:
- 2T (også en videreføring av 1T med teoretisk innhold)
- 2P (bygger på 1P og er det faget med det laveste teoretiske innhold)
- S1 (overlapper mest mot det gamle 2MY/2MS med et samfunnsmessig perspektiv)

Ved VG3, det avsluttende året, gjenstår de to variantene R2 («3MX/3MN») og S2 («3MY/MS»). Dessuten finnes et fag kalt Matematikk X. Dette faget kan velges det andre året og tar for seg tallteori, komplekse tall og sannsynlighet og statistikk. I likhet med 2P og 2T har faget 84 årstimer. R1, S1, R2 og S2 har alle 140 årstimer. Kun et fåtall av skoler tilbyr dette faget grunnet lav interesse.

Kompetansemål etter førsteårsenhetene:

1P vektlegger den praktiske matematikken med direkte anvendelsesområder. Bevis er derfor ikke nevnt i læreplanen i dette faget. 1T med en mer teoribasert matematikk har heller ikke med beviset utover det at et av kompetansemålene i funksjonslæren krever utledning av en derivasjonsregel for polynomfunksjoner ved bruk av definisjonen av den deriverte. Bevis kommer for alvor i 2T.

Kompetansemål etter andre- og tredjeårsenhetene:

2P har heller ikke her med bevisteori. Derimot kjenner vi igjen mye av 2Ts tredje punkt under «Kultur og modellering» fra R94, hvor elevene skal:

«gjere greie for omgrepa implikasjon og ekvivalens, kjenne til vanlege matematiske bevistypar og argumentasjon og gjennomføre matematiske bevis».

Dette er mer eller mindre det samme som står i R94s hovedmoment 1c og d, men med noen vesentlige forskjeller, hva gjelder taksonomisk nivå. Der R94 sier *kjenne* begrepene implikasjon og ekvivalens sier K06 *gjere greie for* en formulering som stiller større krav til eleven. Videre skal de ifølge R94 kjenne matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og kunne gjennomføre *matematiske resonnementer.* Også her legges lista høyere i Kunnskapsløftet der det står helt klart at elevene skal kunne gjennomføre matematiske bevis, ikke bare resonnementer. Ved å se på programfaget matematikk finner vi enda mer skrevet om bevis. Både i læreplanen for R1 og R2 nevnes beviset flere steder. I de grunnleggende ferdighetene i *programområde for matematikk* finner vi følgende:

> Å formulere et matematisk bevis skriftlig med bruk av korrekt matematisk notasjon og logisk gyldige slutninger inngår. I tillegg betyr det å skrive matematiske symboluttrykk og sette opp eller tegne tabeller, diagrammer, grafer og geometriske figurer (Udir 2006).

Dette inngår i det som er en av de grunnleggende ferdighetene *å kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig.* I R1s hovedområder geometri og algebra er også beviset omtalt. Det presiseres at geometrien er en disiplin som handler om utvikling av formelle logiske argumenter og bevis i en geometrisk sammenheng. I algebraen er beviset representert ved «bruk av ulike bevistyper og logiske relasjoner». Det elevene skal lære er spesifisert i kompetansemålene. Når det gjelder R1 og geometri skal de gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras´ setning, både matematisk og kulturhistorisk. Algebraen legger opp til redegjørelse for implikasjon og ekvivalens i tillegg til å gjennomføre direkte og kontrapositive bevis. Sammenliknet med 2MN og 2MX synes beviset å ha en betydelig større rolle i R1.

Ved full fordypning i matematikk tas også faget R2. Her, under algebraområdet, innføres induksjonsbeviset som før innføringen av R94, i praksis var ute av skolematematikken. Blant målene i algebra trekkes det frem at elevene skal gjennomføre og presentere enkle bevis knyttet til formler for tallmønstre samt gjennomføre og gjøre rede for induksjonsbevis. Denne bevistypen er ikke engang blant de elevene skulle kjenne til fra R94. I tillegg til at K06-elever skal kunne føre bevis skal de også kjenne til flere bevistyper. Det er tydelig at satsingen på bevisteori har økt de siste årene når man ser på disse fagene i forhold til sine forgjengere 2MX og 3MX.

S-fagene retter seg inn mot samfunnsfag og økonomi. Læreplanen i matematikk for samfunnsfag inneholder hovedsakelig momenter knyttet til praktisk bruk av matematikken. Bevis og resonnement er ikke viet plass i pensum, men også i S1 skal elevene bruke begrepene implikasjon og ekvivalens i matematisk argumentasjon.

5.5.2 Lærebøker utviklet for K06

I forbindelse med læreplanen for Kunnskapsløftet har jeg valgt å se nærmere på noen lærebøker hvor beviset er mest aktuelt. Dette gjelder fagene 2T, R1 og R2. Grunnet oppgavens omfang og at hverken matematiske resonnement eller bevis spiller noen sentral rolle i førsteårsenhetene i K06 har analysen av bøker fra 1T/P samt S1 og S2 blitt utelatt.

For R1:

Sigma R1 **(Sandvold et al. 2007)**

Sigma R1 er en alt-i-ett-bok med teori, oppgaver, eksempler, figurer og aktiviteter. Her oppfordres det til prosjektoppgaver eller andre utfordringer hvor elevene går sammen, blant annet for å komme frem til bevis. Kapittel 2 er spesielt interessant og har tittelen *Bevis og bevisføring.* Forfatterne har valgt å behandle dette som et eget kapittel. Bevis ble for øvrig ikke et eget matematikktema i læreplanen før forsøksundervisningen på 60- og 70-tallet (Solvang 1986, bind 1). Kapittelet behandler kompetansemålene om at elevene skal kunne:

- *gjøre rede for implikasjon og ekvivalens og gjennomføre direkte og kontrapositive bevis*
- *gjøre rede for forskjellige bevis for Pytagoras´ setning, både matematisk og kulturhistorisk* (Sandvold et al. 2007: 51)

og starter med en introduksjon om logikk og hvordan den relateres til matematikk, før oppmerksomheten rettes mot implikasjon og ekvivalens. Deretter følger to sider med irrasjonale likninger før bevistypene innledes med direkte bevis. Her føres et direkte bevis for at dersom n er et oddetall, må også n^2 nødvendigvis være det. De matematiske og kulturhistoriske bevisene av Pytagoras´ setning fremstilles annerledes enn de øvrige i kapittelet. Boka finner det «mer hensiktsmessig» å skrive enkelte bevis som en sammenhengende tekst fremfor å føre linjer under hverandre med implikasjonspiler imellom. Det visuelle er også en faktor som spiller inn i disse bevisene. Bevis begrenser seg ikke til dette kapittelet. Det er også et mer gjennomgående tema i resten av boka. Blant annet finner vi bevis for periferivinkelsetningen i geometrikapittelet og en utledning av skjæringssetningen for medianer i en trekant i kapittel 3: *Vektorer*. Det påfølgende kapittelet behandler algebraen og her finnes bevis for logaritmeregler. Det oppfordres til et miniprosjekt for å bevise logaritmesetningene for naturlige logaritmer. I kapittel 5, *Grenseverdier og derivasjon*, utledes også to bevis. Det ene begrunner hvorfor derivasjonregelen for e^x er korrekt, mens det andre beviser produktregelen for to funksjoner. Bevis finnes altså innenfor R1s hovedområde *funksjoner,* og er ikke ubetinget knyttet til algebraen og geometrien.

Under delkapittel 2.6 i *Sigma R1* presenteres andre bevisformer, som bruk av moteksempler, det kontrapositive bevis og ad absurdum-bevis før kapittelet avsluttes med et sammensatt eksempel der det kreves bruk av logikk, implikasjon og ekvivalens ved regning med irrasjonale likninger samt kunnskap om bevisføring. Oppgavene i kapittel 2 inneholder ikke mange bevisformuleringer, men krever logiske resonnement og kan ikke løses ved enkel innsettinger. De resterende oppgavene er i all hovedsak knyttet til temaet irrasjonale likninger, og er av en slik karakter at de kan løses ved tradisjonell regning.

Bokas øvrige oppgaver har til dels også inkludert bevis. Både inne funksjonslæren og geometrien gis det oppgaver om henholdsvis bevis av derivasjonsregler og Cevas setning[41]. Sammenlikner vi dette læreverket med andre på tilsvarende årstrinn fra tidligere læreplaner må det kunne sies at beviset står adskillig sterkere her enn i *Matematikk 2MX*. I forhold til *Sinus 2MX*, som er skrevet på bakgrunn av læreplanmålene fra før revideringen av R94, er bevisteorien mer sentral i *Sigma R1* med tanke på å at emnet behandles i et eget kapittel med teori om ulike bevistyper, men utover det finner vi vel så mange bevis i *Sinus 2MX* som i *Sigma R1*. Å behandle bevisteori som eget kapittel ble også gjort i Ommundsen & Solvang (1979), men her ble det understreket at det var et orienteringskapittel.

Sinus R1 (Oldervoll et al. 2007)

Allerede i forordet presiseres det at denne boka legger vekt på den abstrakte matematikken, og at elevene skal få god trening i bokstavregning og bli kjent med matematisk tankegang. Det vises også til symboler som skal markere vanskelige bevis i slutten av delkapitlene.

Det første kapittelet er *Algebra* og innleder, etter en opplisting av kompetansemålene fra K06 i dette området, med implikasjon og ekvivalens. Deretter følger en innføring i bruk av direkte og kontrapositive bevis. Det som skiller denne boka fra *Sigma R1* er behandlingen av bevis og bevisføring som et eget kapittel. Sinus R1 integrerer bevistypene direkte og kontrapositive bevis inn i algebrakapittelet. Disse perspektivene på bevis var for øvrig også et samtaleemne i læreplangruppa for både R94 og K06. Eksemplene som gis innen algebra er så å si identiske i begge disse bøkene. Det dreier seg hovedsakelig om egenskaper ved par- og oddetall. *Sinus R1* synes derimot å være mindre reservert mot å bruke bevisformuleringen i oppgaver. Denne bokas algebrakapittel gir vesentlig flere oppgaver som «bevis at» og «bevis setningen» enn *Sigma R1*. Bøkenes geometrikapitler er forholdsvis like, men *Sigma R1* har i motsetning til *Sinus R1* flyttet målet om redegjørelse for flere bevis av Pythagoras´ læresetning til kapittelet om bevis og bevisføring. Ellers finner vi beviset for

---

[41] Denne sier at linjestykkene AE, BF og CD skjærer hverandre i ett punkt hvis og bare hvis $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$ der AE, BF og CD er medianene i trekanten.

periferivinkelsetningen også i *Sinus R1*s geometrikapittel. En annen forskjell i bøkenes behandling av geometriske bevis er at *Sinus R1* ikke nevner Cevas setning, men derimot bevises setningen om punktets potens[42]. Andre bevis vi finner i *Sinus R1* gjelder kjerneregelen, produktregelen, derivasjon av logaritmer og eksponentialfunksjoner, sammensatte funksjoner og parallelle vektorer. Det er særlig interessant å se at det i denne boka gjennomføres hele fem bevis også innenfor sannsynlighetsregningen, et tema hvor bevis ofte har blitt utelatt i lærebøker. I tillegg presenteres setningen om uavhengige hendelser[43], men utledningen er mer å betrakte som et korollar[44] enn et bevis, og kommer frem ved å kombinere formelen for betinget sannsynlighet og produktsetningen for uavhengige hendelser. *Sigma R1* har ingen bevis i sitt kapittel *Kombinatorikk og sannsynlighet. Sigma R1* beviste tredje logaritmesetning. I *Sinus R1* bevises også første og andre[45], både for den briggske og naturlige logaritmen.

Oppsummerer vi disse bøkenes behandling av hva bevis angår, kan vi ane visse forskjeller i lærebokforfatteres syn på bevis. *Sigma R1* skiller ut bevistypene og redegjørelsen av ulike former for Pythagoras´ læresetning som et eget kapittel, mens *Sinus R1* trekker det inn i henholdsvis algebra- og geometrikapitlene. I bøkenes oppgaver brukes bevisformuleringen oftere i *Sinus R1*. I både *Sigma R1* og *Sinus R1* finnes bevisoppgaver i flere kapitler, men bevisene begrenser seg til geometri og algebra. *Sinus R1* presenterer flere bevis enn hva *Sigma R1* gjør. Et eksempel på dette finner vi i kapittelet om sannsynlighet. Mens *Sigma R1* her utelater bevis, presenteres hele fem bevis i *Sinus R1*. Det kan derimot virke som om *Sigma R1* i større grad enn *Sinus R1*, oppfordrer til å bevise en del av dette gjennom elevprosjekter og samarbeid. Dette kan være årsaken til det er færre bevis i *Sigma R1*.

For R2:

***Sigma R2* (Sandvold et al. 2008)**

I kapittel 1, *Trigonometri*, finnes flere bevis i regneregler for sinus og cosinus til summer og differanser av vinkler. I behandlingen av vektorer og romgeometri er det listet opp flere mål

[42] Setningen om punktets potens: La P være et punkt og la S være en sirkel i planet. La l være en linje gjennom P som skjærer S i punktene A og B. Da er produktet $PA \cdot PB$ uavhengig av posisjonen til linja l.

[43] $P(A/B)=P(A)$

[44] En setning som er en umiddelbar følge av en annen, mer omfattende, setning.

[45] Første logartimeseting: $lg(a \cdot b)=lg\,a+lg\,b$. Andre logaritmesetning: $lg\frac{a}{b}=lg\,a-lg\,b$

som inneholder bevis, blant annet «å regne med og bevise formelen for avstanden fra et punkt til en linje». Innenfor temaet trigonometriske funksjoner er bevisene i hovedsak rettet mot derivasjonsregler. I integrasjonskapittelet finnes et «skolebevis» for analysens fundamentalteorem, som sier at derivasjon og integrasjon er inverse operasjoner. Et mer stringent bevis ville tatt større plass. Mange mener bevis i lærebøker ikke bør være for lange og vanskelige. Det gir feil fokus og kan ødelegge regnegleden (intervju lærer 4).

Induksjonsbeviset som igjen er tilbake i videregående skole er plassert i kapittel 6, *Følger og rekker*. *Matematisk induksjon* er viet to sider med fremgangsmåte og eksempler. Lengre ut i boka finnes flere oppgaver knyttet til temaet.

Boka inneholder mange bevis, og i likhet med *Sigma R1* overlater den gjerne enkelte bevis til elevene gjennom oppgavene. Dette er gjerne bevisoppgaver som bygger på de samme prinsippene som er presentert i tidligere bevis.

Sinus R2 **(Oldervoll et al. 2008)**
Sinus R2 fortsetter i samme spor som sin forgjenger. I det første kapittelet, *Integralregning*, presenteres bevis for volumberegnende formler av ulike romfigurer. I de påfølgende oppgavene er det dessuten to oppgaver knyttet til bevis av formelen for volumet av ei kule med radius *r*. Romgeometrien legger stor vekt på sfærisk geometri og beviser både formelen for arealet av en sfærisk trekant (1) og den sfæriske cosinussetningen (2):

1) $T=(A+B+C-\pi)\cdot r^2$, der *T* er arealet av trekanten, *r* er radien i kula og *A*, *B* og *C* er radiantallet til vinklene.

2) $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$, der a, b og c er trekantens vinkler og C er et av trekantens hjørner.

Induksjonsbeviset er å finne i kapittel 6: *Følger og rekker*. Her finnes også bevis for formlene for summen av aritmetiske og geometriske rekker.
Innledningsvis presenteres induksjonsprinsippet hvor det skal vises at induksjonsgrunnlaget er gyldig og at induksjonstrinnet er oppfylt. Deretter følger to eksempler med full fremgangsmåte og til slutt oppgavene. Alt stoff om induksjonsbevis er viet fire sider. Oppgavene er alle gitt som «vis ved induksjon».

Sammenliknet med *Sinus R1* har ikke denne boka like mange bevis, hverken i teoridelen eller i oppgavene, men i pensum for R2 er det heller ikke fremhevet i samme grad.

Algebraen, med induksjonsbevis, og geometrien inneholder de fleste bevisene. Bevisinnholdet er tilnærmet likt i de to R2-bøkene.

For VG2T:

***Giga VG2T* (Andersen et al. 2007)**

Denne boka har tre hovedkapitler: *geometri*, *kombinatorikk og sannsynlighet* samt *kultur og modellering*. Det velges en praktisk og helhetlig tilnærming til matematikkfaget. Geometridelen inneholder stort sett vektorregning med innslag av parameterfremstilling og skjæring mellom to kurver. Bevis er ikke nevnt i denne delen av boka. Det er det heller ikke i kombinatorikken og sannsynlighetsteorien. I det siste hovedkapittelet, derimot, finner vi teori om direkte og indirekte bevis etter en kort innføring i implikasjon og ekvivalens. Bevisteorien i *Giga VG2T* er veldig lik den vi finner i *Sigma R1* og *Sinus R1*. Kapittelet inneholder åtte oppgaver hvor elevene skal bruke direkte og indirekte bevis i bevisføringen som skal bevise egenskaper ved ulike tall. R1-bøkene har dog bevis som et mer gjennomgående tema. I likhet med *Sigma R1* oppfordrer *Giga VG2T* til at elevene skal fordype seg i bevis. Et eksempel på dette er oppgave 15, side 135, hvor elevene skal finne en læresetning og bruke ulike kilder til å finne ut mer om hvem som har bevist den og hvordan det ble gjort. *Giga VG2T* legger mer vekt på matematikkhistorie enn de andre bøkene. Noen bevis blir også nevnt her og settes inn i en historisk sammenheng.

***Paralleller VG2T* (Ekern et al. 2007)**

Boka *Paralleller VG2T* likner i stor grad *Giga VG2T* med sin tredelte oppbygning og innhold. Denne boka har valgt å kalle første det første kapittelet for *Vektorer* da dette er det dominerende temaet innenfor geometripensum for VG2T. Det tredje kapittelet heter *Matematikk og samfunn*. Siden bevis, i likhet med *Giga VG2T*s oppbygning, ikke behandles før i den siste delen, kommer heller ikke bevisoppgavene før det siste kapittelet. *Paralleller VG2T* tar derimot med et bevis for Tales´ setning[46] og cosinussetningen i kapittel 1. Bevis er heller ikke her et gjennomgående tema i samme grad som i R1-bøkene.

Også i *Paralleller VG2T* behandles algebraiske bevis og det er ikke store forskjeller mellom denne læreboka og de tre andre omtalte bøkene på dette trinnet når det gjelder teori om bevistyper. *Paralleller VG2T* legger kanskje noe mer vekt på bevis ved moteksempel og har en del oppgaver knyttet til dette. Øvrige forskjeller i bevisteori mellom bøkene er minimal.

[46] Tales´ setning: Dersom et hjørne A i en trekant ligger på en sirkel, og de to andre hjørnene, B og C, ligger i hver sin ende av en diameter i den samme sirkelen, må trekanten være rettvinklet, og A er den rette vinkelen.

5.5.3 Analyse av eksamensoppgaver utviklet for K06

Foreløpig er det ikke avholdt mer enn én eksamen i matematikk under Kunnskapsløftet, så analysen av disse oppgavene vil naturlig nok basere seg på et tynnere grunnlag. Eksamen i R2 kommer først våren 2009 og kan følgelig ikke tas med her. På grunn av innføringen med to års obligatorisk matematikk er det ingen eksamen i fagene 1T og 1P. En viktig forskjell i forhold til tidligere år er at eksamen nå er todelt: med og uten hjelpemidler. Ved delen uten hjelpemidler er det kun tillatt med skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. Den andre delen åpner for alt man måtte ønske, med unntak av kommunikasjonsmidler.

En nærmere kikk på eksamenene i 2P og S1 vår og høst 2008 konstaterte at bevis ikke på noen som helst måte var involvert, men ut ifra læreplanmålene er ikke dette overraskende. I 2T er derimot bevis et tema og er allerede å oppspore ved det første eksamenssettet. I oppgave 1d i 2T fra høsten 2008 skal formelen for arealet av et trapes utledes. Blooms kunnskapsrelaterte taksonomi kategoriserer utledninger høyere enn for eksempel «vis at»-oppgaver som var svært vanlige i R94. Å *utlede* plasseres på det femte (*syntese*) av de totalt seks nivåene mens å *vise* befinner seg på nivå tre (*anvendelse*) (Bjarnø 2005). Riktignok er ikke bevisbegrepet direkte gjengitt, men utledninger er sterkt knyttet til bevis. Et annet ord for å utlede er å dedusere, *deduce* på engelsk, og er relatert til deduktive resonnementer. Denne oppgaven anses derfor som relevant med tanke på bevisføring. Eksamenen i 2T fra våren samme år har ikke oppgaver med slike «kravstore» formuleringer.

Før eksamen ble avholdt etter de nye kunnskapsmålene i K06 ble det i 2007 utgitt en form for prøveeksamen, en eksempeloppgave i R1 som elevene kunne forberede seg med. En spesielt interessant oppgave finner vi i 1f der elevene skal bevise at medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt ved bruk av Cevas setning. Det viser seg at de bevisrelaterte oppgavene foreløpig befinner seg i Del 1 av eksamen (uten hjelpemidler), der ferdigheter og grunnleggende matematikkforståelse blir testet. Sammenligner vi denne prøveeksamenen med eksamen fra våren 2008 ser vi tydelig at den opprinnelige oppgaven 1f også er med i eksamensoppgaven, men noe redigert og omformulert, fra «bevis at» til «vis at». Vanskelighetsgraden kan derfor anses som lavere, da det å kunne argumentere logisk og konsistent, som er en del av bevisføringen, befinner seg på Blooms aller høyeste taksonomiske kunnskapsnivå, *evalueringen*. (Imsen 2006: 234) I den endelige versjonens oppgave 1e skal det vises at et punkt ligger på en bestemt linje, med et oppfølgingsspørsmål som spør etter hvilken setning fra geometrien dette er et eksempel på. Den oppgitte figuren er så å si den samme som fra prøveeksamen, men det kan synes som om kravene til stringens ble redusert til den endelige eksamenen. Eksamen i R1, høsten 2008, inneholdt ingen bevisformuleringer eller krav om utledninger, men også her ble det stilt høye krav til resonnement og argumentasjon, særlig i geometrien.

5.5.4 Utformingen av K06

(Delkapittelet bygger i sin helhet på et intervju med professor Kristian Ranestad)

K06 innførte en todelt eksamen med én del uten og én med hjelpemidler. Tanken var å forbedre elevers evner til å utføre algebraiske manipulasjoner og ha mer arbeid uten kalkulator. Et annet ønske læreplangruppa hadde var at oppgavene skulle være mindre algoritmepreget og at det i større grad skulle tenkes kreativt. Her spilte bevis en nøkkelrolle.

Læreplangruppa ville redusere antall emner for å få bedre tid til hvert enkelt. Emnene som ble tatt med ble oppfattet som de mest sentrale og skulle læres grundig. En følge av dette var at kjeglesnitt ble utelatt. Tidsrammen begrenset kunnskapen som her kunne oppnås til et «kjenne til»-nivå. Derfor var det mer ønskelig å fokusere på andre temaer for å heve nivået innenfor disse. Bevis og bevisteknikker ble av læreplangruppa ansett som en måte for å utvikle forståelse i forbindelse med det å se muligheter og deretter velge dem. Elever må tenke selv og resonnere fremfor å følge bestemte «oppskrifter». Dette var årsaken til at beviset ble tatt inn: for å styrke argumentasjonsdelen av faget. Bevis er argumentasjon som går langt utover det som er vanlig i dagligtalen, og et søkelys på bevis skulle bidra til å trene elevers argumentasjonsferdigheter. Noe uenighet oppstod i debatten om det å ha med bevis og bevisføring som et eget tema. Ut i fra flere lærebokforfatteres tolkning av læreplanen kommer det tydelig frem at det nå behandles som et eget tema og vies sågar egne kapitler (Sandvold et al. 2007). I læreplangruppene for både R94 og K06 var det flere som mente at bevis burde tas med der det passet. Det vil si i sammenhenger der det var naturlig å begrunne påstander, integrert i andre emner, og ikke ha en bevisteori som egen gren (intervju Ranestad, intervju Lindstrøm). Dette synspunktet er i tråd med NCTMs ønske om bevis som et gjennomgående tema i undervisningen. Et argument for en slik integrering sa at det vesentlige var hva bevisene skulle brukes på, ikke nødvendigvis det å føre bevis i seg selv. En av intensjonene med K06 var en noe større vektlegging av bevis. Det var flere i læreplangruppa som mente at bevis og bevisføring med tiden hadde utviklet seg til å likne mer logikk.

> Og det som vi til dels hadde sett var at bevis og bevisteknikker som kompetansemål i læreplanen hadde delvis blitt, eller tilsynelatende blitt, redusert til noe logikk. Jeg tror ikke det var intensjonen. Det kan godt være at det er litt overdrevent det som jeg sier, men det å skille bevis ut som et eget emne som sådan var i alle fall jeg veldig skeptisk til. Men det var jo uenighet, eller skepsis til det i læreplangruppa i den forstand at det er viktigere hva en skal bruke bevisene på enn at en skal drive med bevis (intervju Ranestad).

Det var stor enighet knyttet til rollen beviset fikk i K06, og siden det var blitt lagt mer vekt på bevis enn tidligere var det naturlig å innføre induksjonsbeviset. Det ble også ansett som et flott mål for undervisningen i bevisteknikk. Induksjonsbeviset er å finne i algebraen i R2, og sammen med geometrien er algebraen det området som omtaler bevis. Grunnen til at det er nettopp disse områdene som behandler bevis ble begrunnet med at, særlig geometrien, gav en fin innføring i tanken «hva er et bevis?». I tillegg vil det bli for vanskelig i videregående skole å føre bevis innen temaet *funksjoner* da det her opereres med ε-δ-bevis. Dette er en bevisform som mange sliter med.

> Noen studenter utvikler ε-δ-allergi, og trekker ned den mentale rullgardinen hver gang disse symbolene dukker opp (Lindstrøm 1996: 182).

Sitatet gjelder studenter på universitetsnivå. Det vil derfor ikke være noe lettere for yngre elever å føre slike bevis.

Gjennomføringen av bevis til eksamen, eller mer korrekt prøveeksamen, kom først med eksempeloppgaven fra 2007. Et argument mot at denne oppgaven skulle forbli uforandret til eksamen var ikke først og fremst at formuleringen «bevis» ville gjøre den vanskeligere, men at problemet ble tøffere for de som ikke kjente til Cevas setning på forhånd, som ikke er pensum. Riktignok fikk de all informasjon de trengte, men oppgaven ble regnet som vanskeligere «på metanivå» (intervju Ranestad). Oppgave 1e fra eksamen i R1, 2008 hadde dessuten flere fordeler ved at den åpner for bruk av argumentasjon og flere løsningsalternativer, for eksempel ved bruk av formlikhet. Oppfølgingsspørsmålet om hvilken setning fra geometrien dette var et eksempel på, skulle fungere som et hint i argumentasjonen elevene kunne bruke i løsningen. Å kun vise til Cevas setning i løsningen ville trolig ikke blitt godkjent. Argumentasjon og refleksjon er et satsningsområde i matematikken i K06.

6. Læreres syn på bevis som undervisningstema

(Delkapittelet bygger i sin helhet på intervjuer med fem lærere ved to videregående skoler)

For å belyse problemstillingens andre del, om læreres syn på bevis som undervisningsemne i skolen, ble det foretatt fem intervjuer av matematikklærere ved to ulike skoler. To ved den ene (lærer 1 og 2) og tre ved den andre (lærer 3, 4 og 5). I dette kapittelet kommer den *implementerte* delen av læreplanen frem gjennom lærernes undervisningspraksis, i tillegg til den *oppfattede*, det vil si hvordan lærerne forstår læreplanen. Noen av lærernes ulike syn på bevis i skolen representerte en del av argumentene som ble beskrevet i oppgavens 3.2, hvor hovedtyngden av drøftingen befinner seg. Hovedsakelig gjaldt dette når bevis bør innføres, med tanke på at elevene opplever det som et vanskelig tema i matematikken. For det meste var lærerne samstemte i sine svar, uavhengig av deres hovedfag. Lærer 3 innhentet to kollegaer (lærer 4 og 5) med noe ulik fagbakgrunn for å gi meg et utvalg som kunne få frem ulike, alternative perspektiver på bevis. Mange felles synspunkter blant lærerne på bevis i undervisningen medførte et noe mindre innhold i dette kapittelet enn hva det kunne blitt om situasjonen var omvendt.

Innledningsspørsmålet (se *9. vedlegg*) ble tatt med for å få kjennskap til deres forståelse av bevisbegrepet, noe som var avgjørende med tanke på de etterfølgende spørsmålene. Logisk resonnement syntes å være en fellesnevner. Samtidig ble det i de fleste intervjuene raskt trukket et skille mellom stringente bevis og bevis i skolematematikken.

Oppfattet læreplan
Under intervjuene ble det klart at flere opplevde at bevis og bevisføring gjorde seg mer gjeldende og forpliktende i Kunnskapsløftet enn i forgjengeren R94. Grunnen til dette var først og fremst at det er egne beviskapitler i lærebøkene med oppgaver hvor elevene må gjennomføre matematiske bevis på egenhånd, men også fordi eksempeloppgaver til eksamen som blir sendt ut til skolene inneholdt bevisoppgaver. Andre uttalte at de ikke syntes bevis spiller noen større rolle i K06 enn i R94 når det gjaldt den skriftlige delen av faget (intervju lærer 1). På bakgrunn av tilbakemeldingene lærer 1 hadde fått fra kolleger mente denne læreren at matematikkfaget var det eneste som kom styrket ut av Kunnskapsløftet, men at bevisteorien i faget var omtrent som før.

Flere lærere som opplevde at beviset hadde fått en større rolle i pensum gjennom K06 så på dette som positivt. Enkelte var mer usikre på om det nødvendigvis var en fordel. Usikkerheten bunnet i det at det kom for sent inn i skolen med tanke på elevenes utvikling. Det ble gitt uttrykk for at det riktignok aldri er for sent å lære, men elevene er ikke vant med denne type tenkning og dermed må undervisningen starte med det helt grunnleggende. Elevenes *primitive knowing* (Pirie & Kieren 1994) innenfor bevis må utvikles først. Dette tar mye tid, og mange elever tar ikke til seg stoffet i løpet av denne tiden. Derfor kan disse undervisningstimene for mange være «bortkastet». Dermed kom spørsmålet om de mente bevis burde innføres på et tidligere stadium, noe flere mente var riktig å gjøre. Samtidig ble det bemerket at dette ikke nødvendigvis måtte dreie seg om bevis i formell forstand, men være en trening i resonnering og logisk tankegang. Lærer 5, med hovedfag i fysikk, var klar på at geometriske bevis, som Pythagoras´ læresetning, var noe elevene burde lære på ungdomsskolen. Lærer 1 og 2 nevnte også dette. Lærer 4, med geografi som hovedfag, uttrykte derimot at det andre året i den videregående skole var passende med tanke på innføring av bevis i undervisningen. Geometri ble av lærer 2 nevnt som et ypperlig tema for et første møte med bevis siden elevene her kan se ulike sammenhenger med egne øyne. Denne læreren hadde erfaringer med mye geometriske bevis fra egen skolegang på realskolen, som aldersmessig tilsvarer dagens ungdomsskole, og mente det kunne være med på å skape et godt fundament for videre læring i bevis. Det ble ytret noe skepsis til bevis som et eget tema i skolen. Bevisteori var viktig, men ikke undervisning i bevistyper og bevisføring som en isolert del av pensum. Dette ble begrunnet med at det ikke er mange gode eksempler i de ulike bevistypene, noe som gjør at stoffet blir «hengende i luften» for elevene (intervju lærer 3). Dette viste seg også i studien av lærebøkene *Sinus R1*, *Sigma R1*, *Giga VG2T* og *Paralleller VG2T*. Eksemplene og oppgavene som gis i de ulike verkene er svært like.

Implementert læreplan

Undervisningen av bevis hadde med K06 fått en større plass hos flere av lærerne innenfor geometrien, særlig i R1-faget. I andre emner gjorde det seg ikke så gjeldende. Der ble det fokusert mer på det regnetekniske og metoder. Det var ønske om å ivareta den rene, teoretiske siden ved faget, men med eksamen i tankene og et stort pensum å komme gjennom, kunne bevis fort bli utelatt. Bevis var et tema flere av lærerne følte hadde vært mer knyttet til muntlig eksamen de seneste årene, hvor de som kom opp måtte lese litt ekstra på bevis og var de eneste som fikk satt seg ordentlig inn i denne teorien. Ikke alle lærere følte at de nå underviste mer om bevis enn tidligere. De hadde lagt inn bevis der de følte at det var naturlig også under andre læreplaner. Sammenhenger hvor enkelte lærere gav uttrykk for at det føltes naturlig å bevise var innenfor geometrien, og noe bruk av induksjonsbevis i forbindelse med følger og rekker. To lærere uttalte at undervisningen i bevis var avhengig av klassen og nivået den lå på. Svake klasser hadde minimalt utbytte av en slik undervisning, minimalt i forhold til hva de kunne ha lært hvis det ble fokusert på valg og bruk av metoder. Så leksjonene i bevis avhenger ikke bare av temaene det undervises i, men også hvem det undervises for. For mye bevis i undervisningen kan ødelegge for faget ved at regnegleden blir borte (intervju lærer 4). Lærer 3 hadde i alle år gått gjennom mange bevis, uavhengig av læreplanen. Hele klassen skulle være med på bevisprosessen og kom med forslag til hvordan stegene skulle tas. Erfaringen var at slike klasser presterte meget godt på muntlig eksamen hvor de møtte spørsmål om bevis. Læreren ønsket noe mer logikk i den nye læreplanen da dette er grunnlaget for all bevisføring. Bevisføringen under den moderne matematikken hadde slik sett et bedre grunnlag. Eksempelet som ble trukket frem ved intervjuene var kontrapositive bevis der $A \Rightarrow B$ og det negerte, $\neg B \Rightarrow \neg A$, representerer det samme. For alle er ikke dette like opplagt. Flere i læreplangruppa som utarbeidet programfagene i matematikk i K06 hadde derimot, som nevnt i 5.5.4, en oppfatning av at logikken hadde fått for stor plass i matematikkfaget. Læreren mente at for mye av logikken nå var borte.

Egnede temaer for bevisføring i skolen

Når det gjelder hvilke emner lærere mener egner seg spesielt godt som en innføring til hvordan elevene skal lære å føre bevis, trekkes særlig geometri og algebra frem. Geometrien på grunn av de visuelle mulighetene den gir og fordi den ofte ikke stiller krav om forkunnskaper. Sammen med algebraen danner den grunnlaget for mange andre deler av matematikken. Her ble for eksempel funksjonslære nevnt, hvor definisjonen av den deriverte bygger på geometri. Algebraen kommer også til uttrykk i den bevistypen flere av lærerne mente var den elevene behersket best, nemlig direkte bevis. Denne måten å føre matematiske bevis ble betegnet som «rett frem», at du går fra A til B ved hjelp av logiske slutninger. Det at det gås «rett frem» mente de kunne være grunnen til at elevene håndterer dette best. Å gå motsatt vei, som er tilfelle ved kontrapositive og ad absurdum-bevis, ble ansett som vanskeligere og noe som krevde mer modning av den logiske sans. Emner som bygger på en hovedidé ble regnet som egnede for bevis (intervju lærer 3). Dette gjelder blant annet derivasjon og integrasjon med en teknikk hvor det deles inn i mindre og mindre deler og summeres opp. En hovedidé gir elevene muligheten til å bruke kunnskap de har på nye områder. Når elever kan føre bevis for arealsetninger har de et godt utgangspunkt for å bevise formler for volum. Dette er et konkret eksempel på *abstracting* (Skemp 1987) i bevisteorien. Slik kunnskap om areal fungerer som *primitive knowing* og gir grunnlag for kunnskap i tredimensjonal geometri (Pirie & Kieren 1994).

I vurderingen av elevene ble det blant enkelte lærere gitt uttrykk for at kunnskaper om bevis og bevisføring ble vurdert på lik linje med andre temaer i «hverdagen», men at det var ekstra fokus på det ved muntlig eksamen. Her ble bevisteorien vurdert ut ifra argumentasjon i oppgaver i andre emner som geometri og algebra. Dette var gjerne «vis at»-oppgaver. Lærer 1 og 5 brukte denne kunnskapen som en uformell vurdering på bakgrunn av samtaler og den muntlige aktiviteten i timene, og hadde ingen konkrete målinger på dette gjennom skriftlige prøver. Dette skyldtes hovedsakelig at det var mer å hente i andre emner enn bevis med tanke på eksamen.

> Skriftlig så kan ikke jeg se at bevis har fått mer plass. Jeg tenker at på den muntlige delen så har vi mer fokus på bevisføring. Men jeg må innrømme at jeg hele tiden har eksamen i bakhue når jeg underviser. Og jeg vet at når det gjelder det skriftlige så må jeg legge vekt på ferdighetene, og da mener jeg regneteknikk og bruk av metoder for å komme fram til et konkret resultat ut i fra en konkret problemstilling. Og bevis er jo mer abstrakt på en måte (intervju lærer 1).

Denne lærerens erfaring er at bevis og bevisføring har spilt en liten rolle ved eksamensoppgavene de seneste årene og dette har medført mindre vekt på undervisning av temaet i klasserommet. Læreren bemerket også at nivået på elevene var avgjørende for hvor mye det skulle undervises i bevis. Det kan virke som om dette synet på bevis i eksamensoppgaver deles av mange kolleger:

> Når jeg snakker med lærere, jeg treffer jo en del lærere på lærestevner og holder foredrag og sånt noe, så har jeg prøvd å nevne det litt for dem. De er ofte litt skyldbetinget og sier at "ja, men lærebøkene tar ikke med så mye og vi har så dårlig tid og da er det lett og kutte ut. Og det blir ikke prøvd til eksamen" (intervju Lindstrøm).

Nå har det vist seg at lærebøkene som er utviklet for Kunnskapsløftet inneholder mye bevisteori og temaet behandles grundig, spesielt i R1 hvor elevene introduseres for ulike bevistyper. Om bevis gjør seg like gjeldende i eksamensoppgavene som i lærebøkene fremover er uvisst. Hvis så skulle være tilfelle er det grunn til å tro at mange lærere vil fokusere mer på bevis. Det skal bli spennende å se hva som skjer de kommende årene.

7. Oppsummering og konklusjon

7.1 Oppgavens begrensning og forslag til videre studier

Innledningsvis i 1.1 ble Ragnar Solvangs omtale av bevisets rolle i skolematematikken (Solvang 1986, bind 1) nevnt som en inspirasjon i arbeidet med oppgaven. Her nevner han også noe som her med fordel kunne vært med, men som har blitt utelatt på grunn av oppgavens omfang, nemlig å se på rollen som lærerutdanningen spilte til de ulike tider for å realisere læreplanmålene. Dette kan være utgangspunkt for en annen oppgave og kunne supplere innholdet i denne oppgaven. Videre hadde det vært interessant å ha sett studier innen *hvordan* det bør undervises i bevis. I denne oppgaven ligger fokuset på hvilken plass bevis har, og har hatt i videregående skole, samt *hvorfor* vi bør ha det i skolen. Læreres oppfatning av bevis på et mer generelt grunnlag har vært tema for studier i andre land (Buzuzi, G. & Nyaumwe, L. 2007). Det hadde vært interessant å se en liknende undersøkelse her til lands.

I etterkant av intervjuene ble det klart at noen spørsmål ikke fungerte helt som ønsket. Spørsmål 6 i intervju 1 om hva som regnes som gyldige bevis i skolematematikken ble ved et tilfelle oppfattet som noe uklart. I tillegg kunne spørsmål 5 og 7 oppfattes som ganske like da de gav mange like svar. Her var det noe rom for forbedringer, og de to sistnevnte spørsmålene kunne med fordel blitt slått sammen.

Teknologi er her kun nevnt i forbindelse med firefargeproblemet og programvaren Cabri og Geogebra. En studie om matematiske bevis og teknologi åpner for flere interessante forskningsspørsmål. For eksempel lærere og elevers vurderinger av datamaskiners hensiktsmessighet, muligheter og begrensninger innenfor bevisføring, samt hvordan føring av bevis vil kunne foregå i fremtiden.

7.2 Viktige funn

Når det gjelder de to første læreplanene, fra 1896 og 1935, som her har blitt studert, kan det sies at kravene til kunnskaper og ferdigheter i bevis og bevisføring som elevene møtte på denne tiden var noe strengere enn hos etterfølgerne fra 1976 og 1994. Bevis er ikke et mye omtalt tema i noen av disse læreplanene, men på bakgrunn av lærebøker og eksamensoppgaver som ble gitt på denne tiden kan det sies at bevis trolig har vært gjennomgående i matematikkundervisningen som arbeidsmetode, for eksempel ved utledninger av ulike formler. Bevis var ikke nødvendigvis et læringsmål i seg selv, men heller en vei, eller prosess, mot målet, det vil si matematikkforståelse. I eksamensoppgavene som kom i perioden rundt århundreskiftet stod bevis og utledninger sentralt. Både det teoretiske innholdet og kravene i disse oppgavene ble noe redusert fra 1935, særlig etter 1950. Lærebøkene for begge læreplanene stilte krav til at elevene gjennomførte ulike bevis, uten at bevistyper var særskilt spesifisert i læreplanene fra 1896 og 1935. Disse kravene gjaldt først og fremst elever på reallinja på gymnaset hvor en mindre del av årskullet gikk.

Både læreplanen for den videregående skole 1976 og R94 var opptatt av å knytte matematikken til virkelighetsnære situasjoner. Matematikken skulle anvendes. Dette var med på å gjøre det vanskelig å finne plass til bevis, særlig i eksamensoppgaver. Læreplanens del 2 (KUD 1976, del 2), side 115 uttrykte også at det ikke var ønskelig med aksiomatisk-deduktiv metode ved førsteårsenheten 1MA. En «vennligere» holdning til bevis fulgte i kursene 2MN og 3MN, noe vi ser blant annet av lærebøkene fra denne perioden. R94 stilte også visse krav til kunnskaper om bevis og bevisføring hos elevene i andre- og tredjeårsenheten, henholdsvis 2MX og 3MX. Etter revideringen i 2000 ble disse kravene justert ned i læreplanen og ut i fra bøkene som har blitt sammenliknet, fra før og etter denne revideringen, (*Sinus 2MX* (Oldervoll et al. 1995) og *Matematikk 2MX* (Erstad et al. 2001)) synes beviset å ha fått en mindre plass etter 2000. Dette kom også til syne ved eksamensoppgavene etter årtusenskiftet uten at det var intensjonen fra læreplangruppens side. Det at bevisføring i all hovedsak dukker opp i andreårsenhetene kan sees i lys av diskusjonen i 3.1 om at det kommer sent inn den matematiske forståelsen (Pirie & Kieren 1994, Sfard 1991). Her sies det at kompetansen som innebærer å kunne tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnementer samt omforme antakelser til gyldige bevis er noe av det som kommer senest i utviklingen av matematikkforståelse.

Med læreplanen fra 1976 fikk elevene hjelpemidler som kalkulatoren tilgjengelig. Dette effektiviserte utregninger og gjennomgangen av lærestoffet. Kalkulatoren oppleves som overbevisende, og mange elever kan på grunn av dette hjelpemiddelet i enkelte situasjoner føle at bevis er overflødig. Det kan for eksempel være i tilfeller hvor en påstand ser ut til å stemme med mange utførte beregninger eller ved en visuell overbevisning om geometriske sammenhenger dersom det er en grafisk lommeregner. På den annen side kan regning med kalkulatoren oppdage forbindelser i matematikken som stimulerer et behov for bevis. Ideer og gjetninger danner utgangspunktet for utvikling av ny matematisk teori (Lakatos 1976).

Differensieringsproblematikken kan medføre at vanskelige temaer som bevis blir nedprioritert. Med denne planen ble det ble også stilt krav til kunnskaper og ferdigheter i andre- og tredjeårsenhetene i matematikk, men bevis så ikke ut til å ha den samme posisjonen i det gjennomgående arbeidet med faget. Dette kommer til syne ved å se på lærebøker og eksamensoppgaver. Det at matematikkpensum skulle gjelde for en større elevgruppe enn tidligere kan være en delvis forklaring på at bevis ikke fikk en stor plass i læreplanene fra 1976 og 1994.

I den nye læreplanen, K06, er bevis mer omtalt enn i forgjengeren, R94. Formålet med K06 var å utviklet elevenes argumentasjonsevne og logisk- analytiske tankegang. Økt omtale av bevis i den formelle læreplanen gir derimot ikke nødvendigvis nevneverdige utslag i den implementerte læreplanen, altså i læreres undervisning. Heller ikke den oppfattede, i form av lærere og lærebokforfattere. Et resultat av ønsket om trening i argumentasjon var at beviset ble mer omtalt i læreplanen og en todeling av eksamen hvor kalkulatoren bare kan benyttes i del 2. Videre var det ønskelig å redusere antall emner for å styrke kunnskapene og ferdighetene i de gjenværende. Bevis og bevistyper har blitt en del av programfagenes kompetansemål og blir behandlet som selvstendige temaer i lærebøker (*Sigma R1*, Sandvold et al. 2007, *Giga VG2T*, Andersen et al. 2007, *Paralleller VG2T*, Ekern et al. 2007), og delvis som eget kapittel, (*Sigma R1*, Sandvold et al. 2007). I tillegg har induksjonsbeviset kommet tilbake i pensum. Flere av de intervjuede lærerne opplever også at beviset i forbindelse med K06 har fått en mer fremtredende plass. Selv om et par av disse lærerne har hatt et stabilt innhold av bevis i undervisningen er det å lære elevene å føre bevis ved hjelp av flere ulike metoder nytt med K06. Lærerne er også klare over at det kan komme bevisoppgaver til eksamen. Alt i alt fremstår beviset mer sentralt i Kunnskapsløftet i forhold til læreplanene fra 1976 og 1994.

Det at bevis er så vanskelig er et vanlig argument for å utelate det fra skolepensum. Gila Hanna registrerer at elever sliter med temaet, men mener at å kutte ut undervisning i bevisteori fordi det er for vanskelig er en fallitterklæring som vil medføre at elevene går glipp av et av de viktigste elementene i matematikken (Hanna 1996, Beck 1997). Mangel på anvendelsesområder er et annet argument mot bevis i skolen. Hannas svar på dette er at trening i bevis utvikler ferdigheter og teknikker som gir økt innsikt og kunnskap i matematikk (Hanna 2008). Flere forskere støtter dette synet på bevis i undervisningen (Rav 1999, Dawson 2006, Corfield 2003). Det kom også frem i intervjuet med lærerne, at det å koble bevis opp mot en hovedidé i matematikken kunne gi økt innsikt og forståelse.

Som beskrevet i denne oppgaven har det i over 100 år vært diskutert hvilken rolle bevis skal ha i skolen uten at det har blitt enighet om dette. Ulik satsing på bevis i læreplanene gjelder også internasjonalt (Mariotti 2006). I flere land tyder det på at bevis nå står sterkere enn tidligere i læreplaner. Konturene av dette ser vi også i Norge i forbindelse med K06. Slik sett er innholdet i denne oppgaven i overensstemmelse med Mariottis internasjonale betraktinger (Ibid.). Oppgavens studie av læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver støtter liknende, tidligere arbeid om at bevisteorien avtok noe i videregående skole med læreplan av 1976 (Solvang 1986, bind 1). Beviset ble heller ikke en mer sentral del av pensum i R94.

Felles for alle læreplanene for gymnaset og den videregående skole er at de er forsiktige med å innføre bevis og bevisføring på et tidlig stadium, det vil si ved førsteårsenhetene. Dette kan sies å være i tråd med didaktiske perspektiver på undervisning og utvikling av operasjonell og strukturell kunnskap (Sfard 1991). I de videregående matematikkfagene har det vært mer vanlig å innføre den aksiomatiske tenkemåte.

De fem lærerne som ble intervjuet hadde vært i skolen i mange år og undervist etter flere læreplaner. De var alle opptatte av bevis og mente de var en sentral del av faget fordi de sammen med aksiomer og definisjoner bygger opp hele matematikken og begrunner hvorfor matematikken fungerer. Matematikken viser hvordan vi mennesker tenker (intervju lærer 2). Samtidig var lærerne opptatt av å skille mellom overbevisnings- og forklaringsperspektivet ved bevisføring (Hersh 2005) og at bevisene som gjennomføres i skolesammenheng ikke skal være for stringente. Som en «inngangsport» til bevistemaet ble spesielt geometri og algebra trukket frem av enkelte lærere, mens andre mente at alle temaer egner seg for bevisføring så lenge bevisene ikke blir for store og omfattende. Flere av lærerne følte det var noe mer satsning på bevis i K06 sammenliknet med R94, men bortsett fra teori om ulike bevistyper gav ikke dette særlige utslag i deres undervisning. Bevis ble trukket frem i sammenhenger hvor de følte dette var naturlig. Dette gjaldt ofte temaer som geometri og i steder i matematikken hvor det var en hovedidé, det være seg en matematisk idé hvis gyldighet og bruksområder kan utvides til å gjelde mer generelt. For eksempel ideen om summering som kan utvides fra å gjelde areal til volum. Av bevistyper ble direkte bevis trukket frem som den mest populære blant flere av lærerne fordi dette var en prosess elevene forstod. Det å gå fra A til B ved logiske steg mente lærerne var å foretrekke i en undervisningssituasjon fremfor å føre indirekte bevis, som beskrevet i seksjon 2.3.2. Logikken i indirekte bevis kan oppfattes som vanskeligere enn i andre bevistyper. Direkte bevis minner mer om regneoppgaver elevene kjenner til fra før, hvor operasjonene gjennomføres steg for steg og svaret følger direkte. Erfaringen var at direkte bevis var enklere å lære for elevene enn andre bevistyper. Flere lærere gav uttrykk for at elevenes nivå er avgjørende for hvor mye det fokuseres på dette temaet. Av intervjuobjektene var det én lærer (lærer 4) som hadde hatt en ren bevisprøve. Denne læreren benyttet *Sigma R1* (Sandvold et al. 2007) og testet elevene i beviskapittelet (kapittel 2). På forhånd hadde lærer 4 vært ekstra nøye med å forklare hva de kunne forvente å få av oppgaver. Det å gi prøver i bevis var noe nytt og ingen av de forespurte lærerne var særlig begeistret for å ha rene bevisoppgaver i prøvene. «Vis at» var en vanlig formulering i oppgavene de gav og åpnet for en mer fri og mindre stringent argumentasjon. I vurderingen varierte lærersvarene fra at bevisene telte på linje med alt annet gjennom muntlig aktivitet, resonnement og formuleringsevne som læreren observerte gjennom samtaler med elevene, til en mer vippefaktor, altså noe som kunne trekke opp karakteren ved tvilstilfeller.

Det at bevisformuleringer i eksamensoppgaver og lærebøker avtok noe med læreplanen fra 1976 og R94 er ikke ensbetydende med at bevis forsvant. I mange situasjoner gjennomfører elever bevis uten at de er bevisste på det. Deduktivt arbeid, generelt, er også sentralt innenfor matematikken. Løsning av likninger og ulikheter er kanskje de fremste eksemplene på dette (Solvang 1992). De siste drøye 100 årene fra 1896 til 2006 synes allikevel tendensen å være at bevis har fått en mindre plass i den videregående skole. I likhet med flere andre land i verden ser det derimot ut til at bevis nå i større grad er på vei tilbake. Lærerne i utvalget var positive til bevis i skolen og begrunnet dette med at bevis gir svar på det kanskje mest fundamentale spørsmålet i faget, nemlig *hvorfor* matematikken fungerer. Noen lærere mente bevisbegrepet er ukjent for mange elever når de begynner i den videregående skole. Samtidig ble det bemerket at mange elever har lite utbytte av denne teorien på grunn av for dårlige forkunnskaper. Dette medførte mindre undervisning i bevis i klasser hvor dette var tilfelle. Det er altså ikke bare læreplaner, lærebøker og eksamensoppgaver som er styrende for undervisningen. Lærerens oppfatning av elevgruppen er også avgjørende for hvilken plass beviset får i den videregående skole.

Q.E.D.

8. Litteratur

Aarnes, J. F. (2009) *Intuisjonisme – matematikk*. I Store norske leksikon. [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.snl.no/intuisjonisme/matematikk, 03.04.09)

Alexander, A. & Skjulstad, T. (1950). *Matematikk - For gymnasets reallinje II*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Alexander, A. & Skjulstad, T. (1951). *Matematikk - For gymnasets reallinje I*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Alfsen, E. (1981). *Matematikk 2MN*: Aschehoug.

Alfsen, E. (1984). *Matematikk 3MN*: Aschehoug.

Alfsen, M. (1898). *Elementær stereometri for gymnasier og tekniske skoler*. Kristiania: Haffner & Hilles forlag.

Alfsen, M. (1901). *Plangeometri for gymnasiet*. Kristiania: Det norske aktieforlag.

Alfsen, M. (1903). *Analytisk Plangeometri*. Kristiania: H. Aschehoug & Co.

Alfsen, M. (1937). *Trigonometri for gymnasiet* (2. utgave). Oslo: H. Aschehoug & Co.

Alfsen, M. (1938). *Analytisk plangeometri* (7. utgave). Oslo: H. Aschehoug & Co.

Alfsen, M. & Alfsen, K. (1940). *Romgeometri*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Andersen, T., Forus, N., Jasper, P. & Natvig, B. (2007). *Giga VG2T* (1. utgave): N.W. Damm & Søn.

Andresen, A. F. (2007). *Strid fra første stund: Universitetets første professorer.* (Hentet fra: http://www.muv.uio.no/menneskene/forskeren/toprof-afandresen-60307.xml%20.xml, 31.03.09)

Beck, H. J. (1997). *At føre et matematisk bevis*. I Fosgerau, G. & Kristiansen, F. H. (red.), *Midt i matematikken*. Århus: Kvan.

Bjarnø, V. (2005). *Presentasjon på postersesjon og "idebank": Bruk av videoanimasjoner i flerspråklig nettbasert læring.* Nasjonal konferanse om førstelektorkvalifisering - 18. - 19. april 2005 i regi av Pedagogisk utviklingssenter, Høgskolen i Oslo – Tema: Det gode utviklingsprosjekt. (Hentet fra: http://home.hio.no/~vibekeb/dokumentasjon_forstelektorprogrammet/delprosjekt/pus-konferanse/index.htm, 13.05.09)

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T. (2007). *Teaching mathematical modelling through project work.* [Elektronisk versjon] *ZDM, 38*, 15. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/d48174520r178222/fulltext.pdf, 14.04.09)

Bonnevie, J. A. & Sørensen, H. L. (1902). *Lærebog i plangeometri for gymnasiet*. Kristiania: Det norske aktieforlag.

Brekke M. (red.) (2006). *Å begripe teksten. Om grep og begrep i tekstanalyse.* Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Buzuzi, G. & Nyaumwe, L. (2007). *Teachers´ Attitudes towards Proof of Mathematical Results in the Secondary School Curriculum: The Case of Zimbabwe.* Mathematics Education Research Journal, 19, 21-32.

Chalmers, A. F. (2006). *What is this thing called Science?* (3. utgave). Glasgow: Open University Press.

Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dalen, M. (2008). *Validitet og reliabilitet i kvalitativ forskning.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://209.85.129.132/search?q=cache:zLlOsEumTXQJ:www.uio.no/studier/emner/uv/isp/SPED4010/h08/undervisningsmateriale/ValiditetReliabilitetKvalitativForskning.ppt+monica+dalen+reliabilitet&cd=1&hl=no&ct=clnk&gl=no, 12.05.09)

Dawson, J. W. (2006). *Why do mathematicians re-prove theorems?* Philosophia Mathematica, 14, 269-286.

Den Parlamentariske Skolekommisjon (1927). *Lov om høiere almenskoler av 10. mai 1935 med forarbeider*, bind 1 og 5. Oslo: Det Mallingske Bogtrykkeri.

Dreyfus, T. (2004). *Why Johnny can´t prove.* [Elektronisk versjon] Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/q73791627510kn58/fulltext.pdf, 31.03.09)

Durand-Guerrier, V. (2004) *Logic and mathematical reasoning from a didactical point of view. A model-theoretic approach*. [Elektronisk versjon] In Electronic proceedings of the third conference of the European Society for Research in Mathematics Education, February 28–March 3, 2003, Bellaria, Italia. (Hentet fra: http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/TG-Guerrier.pdf, 14.04.09)

Ekern, T., Guldahl, Ø., Holst, E. (2007). *Paralleller* (1. utgave): NKI-Forlaget.

Engelsen, B. U. (2006). *Kan læring planlegges? Arbeid med læreplaner - Hva, hvordan og hvorfor?* (5. utgave). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics: Radical Constructivism Rehabilitated?* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/soccon.htm, 31.03.09)

Erstad G., Heir O., Bjørnsgård I., Borgan Ø. & Pålsgård J. (2001). *Matematikk 2MX* (1. utgave): Aschehoug.

Erstad G., Heir O., Bjørnsgård I., Borgan Ø., Pålsgård J. & Skrede P. A. (2002). *Matematikk 3MX* (1. utgave): Aschehoug.

Euklid. (1482). *Elementa geometrica* [Elektronisk versjon] (Oversatt av E. Ratdolt). Venezia. (hentet fra: http://read.eblad.no/Euklid/, 01.04.09)

Even, M. & Ayalon, R. (2008). *Deductive reasoning: in the eye of the beholder.* [Elektronisk versjon] Educational Studies in Mathematics, 69, 235-247. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/upp71l6g53564625/fulltext.pdf, 16.04.09)

Fenn, R. (2006). *Geometry*: Springer London Ltd.

Gjone, G. (1985). *"Moderne matematikk" i skolen (bind 1 og 2)*. Oslo: Universitetsforlaget.

Gjone G. & Onstad T. (red.) (2000). *Mathema 2000*. Oslo: NKS-forlaget.

Guven, B. (2008). *Using Dynamic Geometry Software to Gain Insight into a Proof.* [Elektronisk versjon] International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13, 251-262. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/q544434u148j6j90/fulltext.pdf, 16.04.09)

Haffner, E. & Haagaas, Th. (1925). *Oppgavene i matematikk til realartium*. Oslo: H. J. Haffners forlag.

Hanna, G. (1996). *The ongoing value of proof.* i L. Puig & A. Gutierrez (red.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bind 1, s. 21-34). [Elektronisk versjon] Valencia, Spania: PME. (Hentet fra: http://fcis.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96prf.html, 16.04.09)

Hanna, G. (2008). *Beyond verification: Proof can teach new methods.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/HANNA.pdf, 03.04.09)

Hersh, R. (2005). *Proving is convincing and explaining*. [Elektronisk versjon] Educational studies in Mathematics, 24, 389-399. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/u03vj96526168xm8/fulltext.pdf, 16.04.09)

Holter H. & Kalleberg R. (red.) (2007). *Kvalitative metoder i samfunnsforskning* (2. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (2008). *TIMSS Advanced 2008 Matematikk Hefte 1*: TIMSS & PIRLS International Study Center

Imsen, G. (2003). *Elevens verden. Innføring i pedagogisk psykologi.* (3. utgave): Universitetsforlaget.

Imsen, Gunn (2006). *Lærerens verden. Innføring i generell didaktikk*. (3. utgave): Universitetsforlaget.

Indresæter, G. (1998). *Hvorfor er brøk og brøkregning vanskelig å forstå?* Hovedfagsoppgave, Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet/Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo.

Jasper, S. B. P. (1984). *Eksamensoppgaver i matematikk 2MN-3MN 1971-1984 H*: Aschehoug.

Jasper, P. & Bjåstad, S. (1992). *Eksamensoppgåver Matematikk 2MN-3MN Våren 1987-våren 1992*: Aschehoug.

Johannessen A., Tufte P. A. & Kristoffersen L. (2007). *Introduksjon til samfunnsvitenskapelig metode* (3. utgave). Oslo: Abstrakt forlag.

Johnsbråten, H. *Resonnementer i matematikkundervisningen.* I *Mathema 2000* (Gjone & Onstad red.) (2000)

Jørgensen, I. (2007). *Kognitiv utvikling.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.inge.no/hit/2007-08%20Kognitiv%20utvikling.pdf, 03.04.09)

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics* (2. utgave): Addison-Wesley Educational Publishers.

Kieren, T. & Pirie, S. (1994). *Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?* [Elektronisk versjon] Springer Netherlands, 26, 165-190. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/u2342r7ggl64245q/fulltext.pdf, 14.04.09)

Kirke- og undervisningsdepartementet (1899). *Undervisningsplan for gymnasiet i henhold til Lov om høiere almenskoler af 27de juli 1896 § 11*. Kristiania: Det norske aktieforlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet (1903) *Reglement for de høiere almenskoler i henhold til lov af 27.juli 1896*. Kristiania: Det norske aktieforlag.

Kirke- og undervisningsdepartementet (1939). *Ny foreløbig leseplan og pensa i de boklige fag i den høgre skolen etter lov av 10. mai 1935. For gymnaset.* Oslo.

Kirke- og undervisningsdepartementet (1976). *Læreplan for den videregående skole, Del 3a*. Oslo: Gyldendal.

Kirke, utdannings-, og forskningsdepartementet (1999). *Læreplanverket for videregående opplæring.* [Elektronisk versjon] Oslo. (Hentet fra: http://www.utdanningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_Artikkel.aspx?id=1120, 30.03.09)

Kline, M. (1972). *Mathematics in Western Culture*: Penguin Books.

Kunnskapsdepartementet (2003) *NOU* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/NOUer/2003/NOU-2003-16/14/5.html?id=370735, 14.04.09)

Kunnskapsdepartementet (2006) *Kunnskapsløftet* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/tema/grunnopplaring/kunnskapsloeftet.html?id=1411, 15.04.09)

Kyrkje- og undervisningsdepartementet (1976). *Læreplan for den videregående skole, Del 2*. Oslo: Gyldendal.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Laksov, D. (1993). *Problemløsning eller matematiske idéer i undervisningen?* [Elektronisk versjon] Nämnaren, 4. (Hentet fra: http://ncm.gu.se/media/stravor/6/e/4347_93_4.pdf, 14.04.09)

Leron, U. (2004) *Mathematical Thinking & Human Nature: Consonance & Conflict.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR113_Leron.pdf, 30.03.09)

Lindstrøm, T. (1996). *Kalkulus* (2. utgave). Oslo: Universitetsforlaget.

Mariotti, M. A. (2006). *Proof and proving in mathematics education*. I Gutiérrez. A. & Boero, P. (red.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* [Elektronisk versjon] (s. 173-204): Sense Publishers. (Hentet fra: http://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=OTCsKu0BZ0kC&oi=fnd&pg=PA173&dq=%22Mariotti%22+%22Proof+and+proving+in+mathematics+education%22+&ots=4qMoDNVMIE&sig=UbpOiklRJam6kzGSBNAZXyxRUnM, 16.04.09)

Mellin-Olsen, S. (1981). *Instrumentalism as an educational concept.* [Elektronisk versjon] Springer Netherlands, 12, 351-367. (Hentet fra: http://www.springerlink.com/content/pj746v8821080v57/fulltext.pdf, 14.04.09)

Nesse, T. (2001). *Eksamenshefte i 3MX*. Bergen: Fagbokforlaget.

Niss M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – ideer og inspirasjon til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* [Elektronisk versjon] København: Undervisningsministeriets forlag. (Hentet fra: http://pub.uvm.dk/2002/kom/04.htm, 14.04.09)

Oldervoll, T., Orskaug, O. & Vaaje, A. (1995). *Sinus 2MX* (1. utgave). Oslo: Cappelen.

Oldervoll, T., Orskaug, O. & Vaaje, A. (1999). *Sinus 3MX* (2. utgave). Oslo: Cappelen.

Olsen, O. H. I. (2008). *Matematisk Modellering.* [Elektronisk versjon] Masteroppgave, Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo, Oslo. (Hentet fra: http://www.duo.uio.no/publ/realfag/2008/73771/OLSEN_MASTER.pdf, 15.04.09)

Ommundsen, J. & Solvang, R. (1979). *Matematikk for den vidaregåande skolen 2MN* (1.utgave): J.W. Cappelens forlag. (Nynorsk ved Olav Stormark)

Ommundsen, J. & Solvang, R. (1980). *Matematikk for den vidaregåande skolen 3MN* (1.utgave): J.W. Cappelens forlag. (Nynorsk ved Olav Stormark)

Onstad, T. (1994). *Fra Babel til Abel - Likningenes historie*: NKS-forlaget.

Pólya, G. (1990). *How to Solve It* (2. utgave): Penguin Books.

Popper, K. (2007). *Kritisk tenkning*. Oslo: Pax Forlag. (Oversatt av J. M. Døderlein)

Prytz, J. (2007). *Speaking of Geometry: A study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus debates.* [Elektronisk versjon] Avhandling for dr.polit.-graden, Teknisk-naturvetenskapliga vetenskapsområdet, Matematisk-datavetenskapliga sektionen, Matematiska institutionen, Uppsala University, Uppsala. (Hentet fra: http://uu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:170317, 14.04.09)

Ragin, C. C. (1994). *Constructing Social Research*. Thousand Oaks, California: Pine Forge Press.

Rav, Y. (1999). *Why do we prove theorems?* Philosophia Mathematica, 7(3), 5-41.

Rinvold, A. R. *En erkjennelsesbasert matematikkfilosofi.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://fagsider.nla.no/rar/Matematikkfilosofi/Generell-spesiell.htm, 05.05.09)

Rock, D. & Brumbaugh, D. K. (2001). *Teaching Secondary Mathematics* (2. utgave): Lawrence Erlbaum Associates.

Sandmel, T. *Matematikkfilosofi*. I *Mathema 2000*: NKS-forlaget.

Sandvold, K. E., Øgrim S., Bakken T., Pettersen B., Skrindo K., Dypbukt W., Mustaparta S., Thorstensen A. & Thorstensen R. (2007). *Sigma R1* (1. utgave). Oslo: Gyldendal undervisning.

Sandvold, K. E., Øgrim S., Bakken T., Pettersen B., Skrindo K., Thorstensen A. & Thorstensen R. (2008). *Sigma R2* (1. utgave). Oslo: Gyldendal undervisning.

Sfard, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* [Elektronisk versjon] Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36. (Hentet fra: https://www.msu.edu/~sfard/Dual%20nature1.pdf, 14.04.09)

Sjøberg, S. (2005). *Naturfag som almenndannelse* (2. utgave): Gyldendal Norsk Forlag.

Skarpenes, O. (2004). *Kunnskapens legitimering - En studie av to reformer og tre fag i videregående skole.* Avhandling for dr.polit.-graden, Sosiologisk institutt, Universitetet i Bergen, Bergen.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics* (2. utgave). Harmondsworth: Penguin Books.

Sogn, H. (1963). *Oppgavesamlinger i matematikk Nr. 4 - Oppgavene i matematikk til realartium* (23. utgave). Oslo: N. W. Damm & Søn.

Solvang, R. (1986). *Bevismetodikk (bind 1 og 2).*

Solvang, R. (1992). *Matematikkdidaktikk* (2. utgave). Oslo: NKI-forlaget.

Store norske leksikon (2009) *Nyhumanisme.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.snl.no/nyhumanisme?gclid=CPXj1_jX0pkCFc-T3wodvldzvA, 02.04.09)

Stubhaug, A. (2004) *Biografi: Bernt Michael Holmboe*. [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.abelprisen.no/no/abel/holmboe4.html, 02.04.09)

Tall, D. (2009). *Cognitive and social development of proof through embodiment, symbolism & formalism.* [Elektronisk versjon] ICMI Conference on Proof. (Hentet fra: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2009a-icme-proof.pdf, 03.04.09X)

Utdanningsdirektoratet (1994). *Den generelle delen av læreplanen*. [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.udir.no/upload/larerplaner/generell_del/generell_del_lareplanen_bm.pdf, 14.04.09)

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplan i matematikk*. [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=212147, 30.03.09)

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplan i matematikk for realfag - programfag i studiespesialiserende utdanningsprogram*. [Elektronisk versjon] (Hentet fra http://www.udir.no/grep/Lareplan/?laereplanid=168732&visning=4, 20.04.09)

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.utdanningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_Læreplan.aspx?id=2100&laereplanid=212147,

Utdanningsdirektoratet (2006). *Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Midlertidig utgave juni 2006.*

Utdanningsdirektoratet (2009) Eksamensoppgaver. [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.udir.no/Eksamensoppgaver/, 12.05.09)

de Villiers, M. (2002). *Developing Understanding for Different Roles of Proof in Dynamic Geometry.* [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/profmat.pdf, 03.04.09)

Wiles, A. Intervju med NOVA [Elektronisk versjon] (Hentet fra: http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/wiles.html, 22.04.09)

9. Vedlegg, intervjuguider

<u>Til lærere (intervju 1):</u>

1) **Hva legger du i begrepet «bevis»?**

2) **Hvilken lærebok benytter du deg av?**

3) **Opplever du at bevis har gjort seg mer gjeldende i forbindelse med K06 sammenliknet med R94?**

   * Bevis: både bevisføring og bevis som eget tema (presisering)

   - Hvis ja: på hvilken måte? Hva tror du kan være årsaken?

   - Ser du på dette som positivt?

   - Hvis positiv: På hvilket trinn mener du elever først bør lære å føre bevis?

     Hva med bevis som eget tema?

   - Hvis negativ: hvorfor synes du dette er negativt? «Negativt» - at det ikke er blitt mer bevis, eller at det har blitt mer bevis?

4) **Hvordan foregår undervisningen i bevislære i dine timer nå sammenliknet med under tidligere læreplaner?**

   - Hvis annerledes - på hvilken måte? Mer? Mindre? Mer gjennomgående i flere temaer og/eller behandlet som eget tema?

5) **I hvilke situasjoner/temaer mener du påstander bør bevises?**

   - Sammenhenger hvor det er mer hensiktsmessig? Noen kapitler i læreboka hvor du finner det mer formålstjenlig å bevise?

   - Hvorfor?

6) **Hva regner du som et gyldig bevis i skolematematikken?**

   - Hva er kravene for tilstrekkelighet?

- Må elevene følge et oppsett?

7) **Synes du noen emner/områder i matematikken egner seg bedre enn andre når elevene skal lære seg å føre matematiske bevis?**

- I så fall, hvilke og hvorfor?

- Hvorfor ikke?

8) **Er det noen bevistyper som du mener er viktigere enn andre i skolesammenheng?**

- Direkte og indirekte bevis, induksjonsbevis eller andre bevistyper

- Hvorfor egner nettopp disse seg?

- Hva gjør disse mer uegnet?

9) **Gir du elevene prøver med oppgaver i bevis?**

* Dette emnet: både bevisføring og bevis som eget tema (presisering)

- Rene bevisprøver?

- Inkludert i prøver med andre temaer?

- Hvis rene bevisprøver: Hvordan er resultatene ved prøver hos dine elever i dette emnet i forhold til prøver av mer regneteknisk art?

- Hvis inkludert i andre: Hvordan er resultatene i bevis i forhold til de andre oppgavene?

- Hvis bevis ikke gis ved prøver: Hvordan vurderes det?

- Hvis forskjeller: hva tror du er årsaken?

10) **Når du vurderer og gir elevene karakter: Hvor mye teller kunnskaper og ferdigheter i bevis og bevisføring i vurderingen av den helhetlige kompetanse sammenliknet med andre temaer?**

- Hvis teller mer/mindre: hvorfor?

Spørsmål i forbindelse med utformingen av R94 (Intervju 2):

1) **Hva var din rolle i forbindelse med utviklingen av R94?**

2) **Ved utarbeidelsen av R94: Hvilke argumenter ble brukt for og imot matematiske bevis i undervisningen?**

3) **Hvor stor enighet var det knyttet til rollen beviset fikk i læreplanen?**

4) **Hva slags rolle vil du si beviset fikk i R94 sammenliknet med andre læreplaner?**

   - sammenliknet med læreplanen fra 1976

   - sammenliknet med K06

5) **Hva var bakgrunnen for at R94 ble redigert i 2000?**

   - fra «forstå og gjennomføre matematiske bevis» til «kjenne matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og selv kunne gjennomføre matematiske resonnementer»

6) **Hva innebar formuleringene å *kjenne* matematiske bevis for noen sentrale resultater i faget og *kjenne til* matematiske bevistyper?**

7) **Hva mener R94 med et matematisk resonnement?**

   - hva skiller det evt. fra et bevis?

8) **Hvorfor ble induksjonsbeviset utelatt etter å ha vært mange år i skolen?**

   - generell enighet om å utelate dette?

   * også borte fra innføringskurs i matematikk (MAT1100) ved UiO – noen sammenheng?

9) **Eksamensoppgavene forut for revideringen av R94 i 2000 inneholdt en del bevisoppgaver. Vet du noe om hvordan resultatene var på disse oppgavene?**

   - hvis bra/dårlig: hva kan ha vært årsaken?

10) **Hvilket inntrykk har du av nye studenters kunnskaper i bevis og bevisføring?**

Spørsmål i forbindelse med utformingen av K06 (Intervju 3):

1) **Hva var din rolle i forbindelse med utviklingen av K06?**

2) **Ved utarbeidelsen av K06: Hvilke argumenter ble brukt for og imot matematiske bevis i undervisningen?**

3) **Hvor stor enighet var det knyttet til rollen beviset fikk i læreplanen?**

4) **Har du inntrykk av at fokuset på matematiske bevis har økt i forbindelse med K06?**

   - i så fall på hvilken måte?

   - hvis ja: hva er begrunnelsen for dette?

5) **Hvorfor ble induksjonsbeviset gjeninnført?**

   - tror du vi kan forvente å se det i eksamensoppgaver for R2 fremover?

6) **Hvordan har resultatene vært i bevisrelaterte temaer ved eksamen?**

   - hvis bra/dårlig: hva kan være årsaken?

7) **I en eksempeloppgave fra 2007, som forberedelse til eksamen, ble det gitt en oppgave der elevene skulle bevise at medianene i en trekant skjærer hverandre i ett punkt ved bruk av Cevas setning. Ved eksamen våren 2008 finner vi igjen en redigert versjon av oppgaven hvor bevisformuleringen er utelatt. Tror du dette er bevisst?**

   - i så fall, hva kan være grunnen?

8) **Hva er årsaken til at bevis hovedsakelig er å finne i kompetansemålene for geometri og algebra?**

9) **Hvilket inntrykk har du av nye studenters kunnskaper i bevis og bevisføring?**